

SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 219
N° DE SÉRIE : 24

THÈSES

présentées devant

L'UNIVERSITÉ DE RENNES

U.E.R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Pierre MICHEL

1^{re} Thèse - Sur les ensembles minimaux engendrés par les substitutions
de longueur non constante.

2^{me} Thèse - Présentation de la complexité en informatique.

Soutenue le 8 Novembre 1975 devant la Commission d'Examen

MM. BRUNEL

Président

KEANE

BOULAYE

CONZE

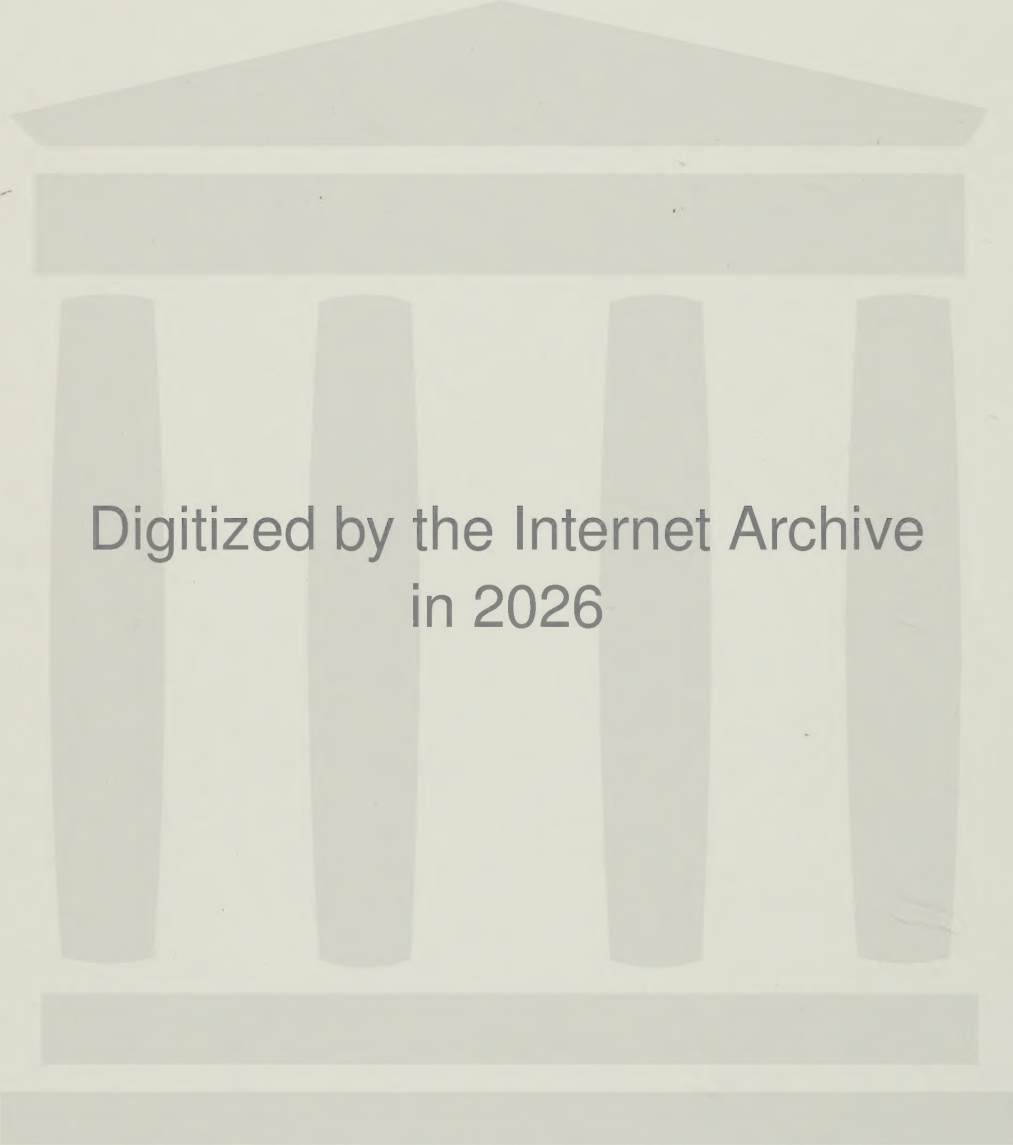
KRENGEL

METIVIER

TOTOKI

} Examineurs

Membre Invité



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551505_0017

SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 219
N° DE SÉRIE : 24

THÈSES

présentées devant

L'UNIVERSITÉ DE RENNES

U.E.R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Pierre MICHEL

1^{re} Thèse - Sur les ensembles minimaux engendrés par les substitutions
de longueur non constante.

2^{me} Thèse - Présentation de la complexité en informatique.

Soutenue le 8 Novembre 1975 devant la Commission d'Examen

MM. BRUNEL

KEANE

BOULAYE

CONZE

KRENGEL

METIVIER

TOTOKI

Président

} Examineurs

Membre Invité

UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. SCIENCES ET PHILOSOPHIE

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON - LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECQ A.

Mathématiques

Professeurs

M. GUERINDON Jean
M. METIVIER Michel
M. GIORGIUTTI Italo
M. TOUGERON Jean-Claude
M. MIGNOT Alain
M. HOUDEBINE Jean
M. KEANE Michaël
M. BOULAYE Guy

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. BERTHELOT Pierre
M. BREEN Lawrence
M. CAMUS Jacques
M. CONZE Pierre
M. FERRAND Daniel
M. GUIVARC'H Yves
M. LE GOUPIL Jean
M. LERMAN Israël
M. NEDELEC Jean-Claude
M. TRILLING Laurent
M. VERJUS Jean-Pierre

Physique

M. VACHER Michel
M. VIGNERON Léopold
M. LE BOT Jean
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN Stéphane
M. LE MONTAGNER Serge
M. MEVEL Jean-Yves
M. MEINNEL Jean
M. REGENSTREIF Edouard
M. BRUN Pierre
M. LE ROUX Emile
M. DUBOST Gérard
M. ARQUES Pierre-Yves
M. HAEUSLER Claude
M. NUSIMOVICI Michel

M. GUIDINI J.
M. DECAMPS E.A.

Professeurs

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

Chimie

M. VENE Jean
M. LE MOAL Henri
M. LEVAS E.
M. PELTIER Daniel
M. PRIGENT J.
M. FOUCAUD André
M. LANG Jean
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT Claude-Roger
M. KERFANTO Michel (E.N.S.C.R.)
M. DABARD René
M. GRANDJEAN Daniel
M. LUCAS Jacques
M. MARTIN Guy

M. TALLEC André

Chimie Biologique

M. JOUAN Pierre
M. DUVAL Jacques

Géologie

M. COGNE Jean
Mlle DURAND Suzanne
M. BOILLLOT Gilbert

M. HAMEURT Jean-Marie
M. LARDEUX Hubert

Zoologie

M. RICHARD Gaston
M. MAILLET Pierre
M. RAZET Pierre
M. FOLLIOU Roger
M. ALLEGRET Paul
M. MANIEY Jacques
M. JOLY Jean-Marie
M. LEFEUVRE J.C.

M. CALLEC Jean-Jacques

Botanique

M. VILLERET Serge
M. CLAUSTRES Georges
Mlle GOAS Gabrielle
Mlle GOAS Marie
Mme LEMOINE Cécile

M. TOUFFET Jean

Philosophie

M. ORTIGUES Edmond

M. JACQUES Francis
M. BEYSSADE Jean-Marie

A ma femme ,

A mes parents ,

En tête de ce travail, je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance à Michael KEANE qui a été pour moi un guide et un ami. Il a suscité mes travaux et il m'a aidé patiemment dans mes recherches. Il a été un conseiller efficace et dévoué. Qu'il veuille bien accepter, ici, l'expression de ma gratitude.

Monsieur BRUNEL, après m'avoir conseillé lors de son long séjour à Rennes, me fait le grand honneur de présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie bien respectueusement.

Je suis vivement reconnaissant à Monsieur BOULAYE de m'avoir proposé un sujet de seconde thèse fort intéressant. Il m'a ainsi permis d'élargir le champ de mes connaissances mathématiques.

Que Michel METIVIER, dont j'apprécie depuis longtemps les conseils, ait accepté de faire partie de ce jury est pour moi une grande satisfaction.

Monsieur KRENGEL me fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux et je lui en suis très reconnaissant.

Les discussions que j'ai eues avec Jean-Pierre CONZE, Yves GUIVARC'H et Christian GRILLENBERGER m'ont été très profitables. Qu'ils soient assurés de mon amitié.

Il me plaît aussi de rendre hommage à tous mes maîtres en mathématiques, de l'école primaire à la faculté, et plus particulièrement à Monsieur le Recteur MARTIN dont les leçons

restent présentes à ma mémoire, à Monsieur BOCLE à qui je dois d'avoir découvert les probabilités, à mes collègues de l'Université.

Enfin Mademoiselle MOUEZY s'est acquittée avec beaucoup de compétence de la frappe de cette thèse.

INTRODUCTION

L'objet principal de ce travail est l'étude des ensembles minimaux engendrés par les suites de substitution de longueur non constante.

On sait qu'une des méthodes les plus simples pour engendrer des ensembles minimaux de la dynamique symbolique est l'introduction des substitutions qui à chaque symbole associent un bloc de symboles. Ces substitutions ont été principalement introduites en 1963 par Gottschalk qui a synthétisé les travaux antérieurs de Morse, Hedlund et lui-même.

Depuis lors de nombreuses études ont été entreprises. Deux cas se produisent, suivant que les blocs associés aux symboles soient de même longueur ou non.

Dans le premier cas, des substitutions dites de longueur constante, une classification topologique et métrique complète a été réalisée pour deux symboles par Coven et Keane, et des études très approfondies ont été également effectuées par J.C. Martin.

Dans le second cas, seuls des résultats topologiques ont été obtenus par J.C. Martin.

Le travail qui suit se compose de deux parties.

Le problème, qui nous a été proposé par M. Keane et qui est le sujet de la première partie, est l'étude métrique des substitutions de longueur non-constante.

Nous rappelons d'abord les définitions et les résultats relatifs aux systèmes dynamiques, en particulier les résultats de Gottschalk, Hedlund, Oxtoby et Kakutani, ainsi que ceux de Martin relatifs à la structure topologique des ensembles minimaux de substitution de longueur non constante.

Le chapitre I est une démonstration de la stricte ergodicité des ensembles minimaux engendrés par des substitutions. Elle généralise

un travail de Klein effectué dans le cadre des substitutions de longueur constante.

Le chapitre II s'intéresse à une classe de substitutions de longueur non constante sur deux symboles. On y démontre que les substitutions sont à spectre discret. C'est la première fois, à notre connaissance, qu'une étude métrique des ensembles minimaux de substitution de longueur non constante a été réalisée. Elle est basée en majeure partie sur l'étude comparée des blocs images des deux symboles par les puissances successives de la substitution.

Le chapitre III donne un exemple de substitution de longueur non constante possédant une partie continue dans son spectre.

Il nous semble qu'une classification devrait pouvoir s'effectuer à l'aide de la notion de "densité de coïncidence" que nous avons introduite dans le chapitre II. En effet, si on regarde la classification effectuée par Coven et Keane [4], on constate que les substitutions de longueur constante qui ont une densité de coïncidence égale à 1 sont les suites de substitution de Toeplitz, et correspondent à un spectre discret. Au contraire les extensions généralisées des suites de Morse, à spectre continu, ont une densité de coïncidence nulle.

Dans les cas non constants que nous avons étudiés, nous avons trouvé un spectre discret lorsque la densité de coïncidence était égale à 1, et un spectre continu lorsque la densité de coïncidence était différente de 1. Nous ne savons pas encore si ce fait est général.

Enfin une deuxième partie, indépendante de la précédente, termine ce travail. Le problème posé était le suivant : étant donné un système dynamique (Ω, m, T) , une suite croissante finie d'entiers $(k_1 < \dots < k_n)$ et un nombre réel ε , existe-t-il un sous-ensemble mesurable A dont les images par T^{k_i} soient deux à deux disjointes et recouvrent Ω à ε près ?

Si $k_i = i$ pour tout i entre 1 et n , ceci est vrai : c'est le lemme de Rokhlin.

Très rapidement nous avons construit un contre-exemple.

Avec M. Keane, nous avons étudié le cas général et montré que, la suite (k_i) étant donnée, il existe un nombre rationnel σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, tel que la mesure de toute union disjointe de $T^{k_i} A$ soit inférieure à $\sigma m(\Omega)$.

Certains résultats développés dans les deux parties ont été résumés dans deux notes aux Comptes-Rendus [25] et [22].

PREMIERE PARTIE

O.-RAPPELS ET DEFINITIONS

0.1.- On appelle *système dynamique compact*, ou *flot compact*, le couple (Ω, T) où Ω est un espace de Hausdorff, compact, non vide, et où T est un homéomorphisme de Ω sur lui-même. Le groupe de transformations est l'ensemble $\{T^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Un sous-système de (Ω, T) est un couple (Ω_0, T) tel que Ω_0 soit un sous-ensemble compact non vide de Ω , invariant par la restriction de T à Ω_0 .

Un système dynamique est minimal s'il ne contient pas de sous-système propre.

Pour chaque point ω de Ω , l'orbite de ω est l'ensemble défini par $O(\omega) = \{T^n(\omega) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, et on note O_ω l'orbite fermée de ω définie comme l'adhérence de l'orbite $O(\omega)$.

Un système (Ω, T) est minimal si et seulement si l'orbite de chaque point est dense dans Ω .

Par l'axiome du choix, tout système dynamique contient au moins un sous-système minimal.

Un système dynamique (Ω, T) est dit :
uniquement ergodique : s'il existe une seule mesure de probabilité μ sur l'ensemble des boréliens de Ω , invariante par T .
(μ est alors une mesure ergodique par rapport à T).

strictement ergodique : s'il est uniquement ergodique et minimal.

On notera un système dynamique strictement ergodique par le triplet (Ω, T, μ) .

0.2.- Isomorphismes des systèmes dynamiques.

Deux systèmes dynamiques (Ω, T) et (Ω', T') sont dits (topologiquement) *isomorphes* s'il existe une application Π , bijective et bicontinue de Ω dans Ω' telle que $\Pi \circ T = T' \circ \Pi$.

Lorsque (Ω, T, μ) et (Ω', T', μ') sont deux systèmes dynamiques strictement ergodiques, on définit une autre notion d'isomorphisme :

Deux systèmes dynamiques strictement ergodiques (Ω, T, μ) et (Ω', T', μ') sont dits *isomorphes au sens de la mesure* s'il existe une application Π bicontinue de Ω dans Ω' et un sous-ensemble Ω'_0 , invariant sous T' , de Ω' tels que :

- a) $\Pi \circ T = T' \circ \Pi$
- b) $\mu'(\Omega'_0) = 1$
- c) Π est injective sur $\Pi^{-1}(\Omega'_0)$
- d) pour tout borélien B de $\Pi^{-1}(\Omega'_0)$ on a
$$\mu'[\Pi(B)] = \mu[B]$$

Tout isomorphisme topologique conservant la mesure est un isomorphisme au sens de la mesure.

L'homéomorphisme T induit un opérateur unitaire, que nous noterons aussi T , sur l'espace $L^2(\Omega, \mu)$ des fonctions

à valeurs complexes, définies sur Ω , de carré μ -sommable, par

$$(Tf)(\omega) = f(T\omega) .$$

On désigne le spectre de cet opérateur unitaire sous le nom de *spectre de* (Ω, T, μ) .

Les propriétés spectrales de (Ω, T, μ) sont invariantes sous les isomorphismes de (Ω, T) .

0.3.- Nous rappelons les résultats classiques sur le spectre de (Ω, T, μ) .

(Ω, T, μ) est ergodique si, et seulement si, 1 est valeur propre simple de l'opérateur induit T

(Ω, T, μ) est "mélangeant" si, et seulement si, pour tout f, g de $L^2(\Omega, \mu)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^n f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle .$$

Un système dynamique ergodique est dit :

- (i) à *spectre purement continu* s'il n'existe aucune valeur propre sauf 1 (T est alors faiblement mélangeant)
- (ii) à *spectre discret* si les fonctions propres de l'opérateur induit forment une base de $L^2(\Omega, \mu)$
- (iii) à *spectre continu* s'il n'est pas à spectre discret.

Si (Ω, T, μ) est un système dynamique ergodique, alors :

- (i) la valeur absolue de toute fonction propre de T est constante presque partout
- (ii) chaque valeur propre est simple
- (iii) l'ensemble des valeurs propres de T est un sous-groupe du cercle $\{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Enfin, on rappelle (Théorème de Von Neumann et Halmos) que deux systèmes dynamiques ergodiques à spectre discret sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même spectre.

En particulier, les systèmes dynamiques définis sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par les rotations irrationnelles d'angles α et $1-\alpha$ ayant même spectre, sont isomorphes.

0.4.- Un sous-ensemble M de $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}$ s'il existe un ensemble fini F tel que $F+M = \mathbb{Z}$.

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels est dite "Césaro-uniforme" si $\lim_j \frac{1}{j} \sum_{i=t+1}^{t+j} a_i$ existe, uniformément par rapport à t dans $\mathbb{Z}$.

Pour un espace compact Ω , soit $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues munies de la norme "sup".

$A \subset \mathcal{C}(\Omega)$ est total dans $\mathcal{C}(\Omega)$ si l'espace vectoriel engendré par A est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$.

$\omega \in \Omega$ est *presque périodique* si pour chaque voisinage U de ω l'ensemble $\{t \in \mathbb{Z} \mid T^t \omega \in U\}$ est dense dans $\mathbb{Z}$.

$\omega \in \Omega$ est *strictement transitif* si pour chaque fonction

f d'un sous-ensemble total de $\mathcal{C}(\Omega)$, la suite $(f \circ T^n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ est Césaro-uniforme.

$\omega \in \Omega$ est strictement ergodique s'il est strictement transitif et presque périodique.

On a alors les théorèmes suivants, qui fournissent un lien entre les propriétés minimales des sous-systèmes et les propriétés des points d'un système dynamique :

Théorème (Gottschalk-Hedlund)

Pour tout ensemble Ω_0 , compact, invariant, non vide de Ω on a l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- (i) Ω_0 est minimal invariant
- (ii) $(\forall \omega \in \Omega_0) (O_\omega = \Omega_0)$
- (iii) $(\exists \omega \in \Omega_0) (O_\omega = \Omega_0 \text{ et } \omega \text{ est presque périodique})$

Théorème (Oxtoby)

Un sous-ensemble Ω_0 compact, invariant, non vide de Ω est uniquement ergodique si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \circ T^i(\omega)$ existe pour chaque fonction f de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ uniformément par rapport à ω dans Ω_0 .

On en déduit le

Corollaire : Ω_0 est strictement ergodique si, et seulement si, il est l'orbite fermée d'un élément ω strictement ergodique.

0.5.- Dynamique symbolique

Dans la suite nous étudierons certains sous-systèmes de l'espace de la dynamique symbolique défini sur un alphabet

fini.

Soit A un ensemble fini et Ω_A l'espace produit $\Omega_A = A^{\mathbb{Z}} = \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid (\forall n \in \mathbb{Z}) (\omega_n \in A)\}$ muni de la topologie produit (discrète).

Les éléments de $A^{\mathbb{Z}}$ sont appelés des "bi-suites" ; ceux du sous-ensemble $A^{\mathbb{N}}$ sont des "suites".

Sur l'ensemble Ω_A , T est le *shift*, défini comme la transformation de Ω_A dans lui-même telle que

$$(T\omega)_i = \omega_{i+1} \quad i \in \mathbb{Z}$$

Le système dynamique (Ω_A, T) est l'espace de la dynamique symbolique. [8]

Nous prendrons pour alphabet l'ensemble $P = \{0, 1, \dots, r-1\}$ et nous noterons Ω_r l'ensemble correspondant.

Ω_r muni de la topologie produit est un espace compact, métrisable, totalement discontinu, homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Une distance sur Ω_r peut être définie par

$$d(\omega, \omega') = \frac{1}{1 + \sup \{n \mid n \geq 0 \quad \omega_i = \omega'_i \quad \forall i \mid |i| < n\}}$$

Une base ouverte (et fermée) pour la topologie induite par cette métrique est formée par l'ensemble de tous les "cylindres" de dimension finie :

$${}_t[B] = \{\omega' \in \Omega \mid \omega'_{t+j} = b_j \quad 0 \leq j \leq n-1\}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{Z}$ et où $B = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$ est un "bloc" c'est-à-dire un élément de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} P^k$.

Si B est un élément de P^n on notera $n = \lambda(B)$ et

on dira que $\lambda(B)$ est la longueur du bloc B ou que B est un n -bloc.

On notera $\omega(n,m)$ le bloc de ω commençant à ω_n et de longueur m , soit :

$$\omega(n,m) = \omega_n' \omega_{n+1} \dots \omega_{n+m-1}$$

L'image réciproque d'un cylindre est un cylindre donc le shift est continu.

Comme les fonctions indicatrices des cylindres finis forment un ensemble total dans $\mathcal{C}(\Omega)$, nous avons les résultats suivants :

$\omega \in \Omega$ est presque périodique si et seulement si pour chaque bloc B , l'ensemble des entiers relatifs t tels que $\omega_t \omega_{t+1} \dots \omega_{t+\lambda(B)-1} = B$ est ou vide ou dense dans $\mathbb{Z}$.

(ω est alors une bisuite récurrente au sens de Martin [24]).

$\omega \in \Omega$ est strictement transitif si et seulement si pour chaque bloc B , l'ensemble précédent est Césaro-uniforme dans $\mathbb{Z}$.

0.6.- Substitutions

Soit $P = \{0, 1, \dots, r-1\}$.

On appelle *substitution* θ sur P une application θ de P dans l'ensemble $P^* = \bigcup_{i \geq 2} P^i$, des blocs de longueur supérieure ou égale à 2.

La *longueur de la substitution* θ sur P est la famille $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$ avec $\lambda_i = \text{card} [\theta(i)]$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_i = n \quad \forall i \in \{0, \dots, r-1\}$, la substitution est dite de longueur constante.

Remarquons que si une substitution n'est pas de longueur constante, aucune de ses puissances ne l'est.

Nous notons $\theta_{(j)}(i)$ le j -ième élément de $\theta(i)$ ($0 \leq i \leq r-1$, $1 \leq j \leq \lambda_i$).

Si $A = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ est un bloc, nous notons $\theta(A)$ le bloc $\theta(A) = \theta(a_0) \theta(a_1) \dots \theta(a_{n-1})$.

On définit par récurrence, $\theta^n(A) = \theta[\theta^{n-1}(A)]$ et on pose, par convention, $\theta^0 = I$.

On note $\lambda_i^{(n)} = \text{card} [\theta^n(i)]$.

Suivant Gottschalk [7], nous posons

$$L_0 = \{pq \mid (pq \in P^2), (\exists k) (\theta_{(\lambda_p)}^k(p) = p), (\theta_{(1)}^k(q) = q), (\forall r \in \text{Im } \omega_{pq}) (\exists i \geq 1) (pq \in \theta^i(r))\}$$

où ω_{pq} est la bi-suite définie par

$$\omega_{pq} [-\lambda_p^{(nk)}, \lambda_p^{(nk)} + \lambda_q^{(nk)}] = \theta^{nk}(p) \cdot \theta^{nk}(q)$$

L_0 est l'ensemble des couples pq de P^2 pour lesquels on peut engendrer une bi-suite presque périodique à l'aide de la substitution θ .

En effet, on sait [Gottschalk [7] th. 3-38] que l'ensemble W_0 défini par $W_0 = \{\omega_{pq} \mid pq \in L_0\}$ est un ensemble non vide de bi-suites ω presque périodiques sous T et que l'orbite fermée de chaque point ω_{pq} de W_0 est minimale sous T .

Toutes les substitutions considérées vérifieront en outre la condition

$$(\forall i \in P) (\forall j \in P) (\exists m \in \mathbb{N}) (i \in \theta^m(j)) .$$

En prenant, si besoin est, une puissance de θ nous supposerons que ceci a lieu pour $m = 1$.

Nous supposerons également que $\theta_{(0)}(0) = 0$, soit

$$\theta(0) = 0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{\lambda_0-1}$$

Les sous-systèmes du système dynamique symbolique que nous nous proposons d'étudier dans la suite sont les orbites fermées des bi-suites ω_{pq} obtenues à partir d'une substitution θ : on les appelle "*ensembles minimaux de substitution*".

Un ensemble minimal engendré par la substitution θ sera noté O_θ . Il est indépendant du choix de $\omega = \omega_{pq}$ dans W_0 .

Définitions. - La substitution θ sera dite

- (i) finie si ω_{pq} est périodique
- (ii) discrète si le spectre de (O_θ, T) est (pure-ment) discret
- (iii) continue si le spectre de (O_θ, T) est continu.

A une substitution θ nous associerons la matrice

$M = M(\theta)$ définie par

$$M = ((\lambda_{ij})) \quad \begin{array}{l} i : \text{indice de ligne} \\ j : \text{indice de colonne,} \end{array}$$

où λ_{ij} est le nombre de fois où le symbole j apparaît dans $\theta(i)$.

Il est aisé de voir que si $\lambda_{ij}^{(n)}$ désigne le nombre de fois où le symbole j apparaît dans $\theta^n(i)$ on a

$$M^n = ((\lambda_{ij}^{(n)})) .$$

La longueur de $\theta^n(i)$ est donnée par

$$\lambda_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_{ij}^{(n)} \quad n \in \mathbb{N}$$

0.7.- Lemme de Martin [24]

Définition

Soit A un bloc de longueur n supérieure à $\sup_i \lambda_i^{(k)}$. On dit que A est déterminé d'ordre k si la décomposition de A en blocs $\theta^k(i)$ est unique.

Autrement dit si :

$A = A_1 \theta^k(i_1) \theta^k(i_2) \dots \theta^k(i_s) A_2 = A_3 \theta^k(j_1) \theta^k(j_2) \dots \theta^k(j_{s'}) A_4$
 où A_1 et A_3 sont des parties finales de blocs $\theta^k(i_0)$ et $\theta^k(j_0)$ et où A_2 et A_4 sont des parties initiales de blocs $\theta^k(i_{s+1})$ et $\theta^k(j_{s'+1})$, et où $i_0 i_1 \dots i_{s+1}$ et $j_0 j_1 \dots j_{s'+1}$ sont des blocs apparaissant dans ω_{pq} , alors on a :

$$A_1 = A_3$$

$$A_2 = A_4$$

$$s = s' \text{ et } i_t = j_t \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

On a le lemme fondamental suivant :

Lemme.- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que chaque t -bloc de ω_{pq} soit déterminé d'ordre k .

0.8.-Entropie

0.8.1. Définition de l'entropie métrique

Soit (Ω, T, ν) un système dynamique.

Pour toute sous-tribu finie $\mathcal{A}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur Ω

on pose

$$H_v(\mathcal{A}) = -\sum v(A) \log v(A)$$

où la sommation s'étend aux atomes A de $\mathcal{A}$. (les logarithmes sont pris à base 2 et $0 \cdot \log 0 = 0$).

L'entropie de $\mathcal{A}$ par rapport à la transformation T de l'espace Ω (ou entropie moyenne de $\mathcal{A}$) est définie par :

$$h_v(\mathcal{A}, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_v \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \mathcal{A} \right)$$

et l'entropie (métrique ou encore au sens de la théorie de la mesure) de T est alors :

$$h_v(T) = \sup h_v(\mathcal{A}, T),$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des sous tribus finies de $\mathcal{B}$.

0.8.2.-Définition de l'entropie topologique

Soit Ω_0 un sous-ensemble compact, invariant non vide de Ω et désignons par $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert quelconque de Ω_0 .

On désigne par entropie topologique de $\mathcal{U}$ la quantité $H_t(\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U})$ où $N(\mathcal{U})$ désigne le nombre d'éléments du plus petit sous-recouvrement ouvert de Ω_0 , extrait de $\mathcal{U}$.

T étant une application continue de Ω_0 dans Ω_0 on pose :

$$h_t(T, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left[\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \mathcal{U} \right]$$

L'entropie topologique de T est alors

$$h_t(T) = \sup h_t(T, \mathcal{U})$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de Ω_0 .

0.8.3.- On a entre les deux notions d'entropie le théorème suivant :

Théorème.-

1) Si Ω_0 est un sous-ensemble invariant compact non vide du système dynamique (Ω, T, v) on a

$$h_v(T) \leq h_t(T)$$

2) Si (Ω_0, T) est un système symbolique, il existe une mesure de probabilité invariante ν_0 sur Ω_0 telle que

$$h_{\nu_0}(T) = h_t(T)$$

En particulier si Ω_0 est strictement ergodique, son unique mesure de probabilité invariante μ est telle que

$$h_\mu(T) = h_t(T)$$

Dans le contexte où nous nous placerons dans la suite, ce fait sera vérifié, autrement dit les deux notions d'entropie métrique et topologique coïncideront. Le mot "entropie" sera donc utilisé sans ambiguïté.

0.8.4.- La propriété suivante de l'entropie sera utilisée dans la suite :

Si $\mathcal{A}_k$ est engendrée par une partition finie (A_k) de Ω , constituée de k ensembles de mesure non nulle, on a

$$H(\mathcal{A}_k) \leq \log k$$

Cette propriété est une conséquence directe de la définition de l'entropie et de la convexité de la fonction logarithme.

I.-STRICTE ERGODICITE D'ENSEMBLES MINIMAUX DE SUBSTITUTION

Ce premier chapitre a pour but de donner une démonstration de la stricte ergodicité des ensembles minimaux de substitution engendrés par une substitution de longueur non constante sur r symboles.

Elle généralise un travail de Klein [23] consacré aux substitutions de longueur constante.

Pour démontrer cette stricte ergodicité il nous suffit de démontrer la stricte transitivité de ω ce qui sera si la fréquence d'apparition d'un bloc B dans $\omega(n,m)$ est nulle ou converge lorsque m tend vers l'infini, uniformément en n .

Cette démonstration sera donnée par une succession de lemmes.

I.1.-Lemme

Chaque symbole j de P a une densité γ_j , indépendante de i , dans $\theta^\infty(i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \theta^{nk}(i)$.

Démonstration

Le rapport $\frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{\lambda_i^{(n)}}$ représente la densité de j dans $\theta^n(i)$.

Or la matrice M introduite en (06) est une matrice positive.

D'après le théorème de Perron-Frobenius, elle admet une valeur caractéristique réelle positive r_1 , qui est une racine simple de l'équation caractéristique et qui est supérieure aux modules de toutes les autres valeurs

caractéristiques. A cette valeur caractéristique "maximale" r_1 , il correspond un vecteur caractéristique z de coordonnées positives.

Posons $z = (\beta_{io})$ ($0 \leq i \leq r-1$) et soit $f = (\alpha_{oj})$ ($0 \leq j \leq r-1$) un vecteur positif satisfaisant $f.M = r_1 f$ et normalisé par un facteur multiplicatif de telle sorte que

$$\sum_{i=0}^{r-1} \beta_{io} \alpha_{oi} = 1$$

Soit M_o la matrice carrée d'ordre r , de rang 1, définie par

$$M_o = ((\beta_{io} \alpha_{oj}))$$

On sait alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} M^n$ existe et vaut M_o .

On a donc

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{r_1^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} M^n = M_o = ((\beta_{io} \alpha_{oj}))$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{\lambda_i^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{r_1^n}}{\frac{\lambda_i^{(n)}}{r_1^n}} = \frac{\beta_{io} \alpha_{oj}}{\sum_j \beta_{io} \alpha_{oj}} = \frac{\alpha_{oj}}{\sum_j \alpha_{oj}} = \gamma_j$$

indépendant de i .

Remarque : Si $\theta_{(o)}(i) \neq i$, $\theta^\infty(i)$ peut ne pas avoir de sens, mais nous pouvons parler de la densité du symbole j dans $\theta^n(i)$. Comme cette densité a, d'après ce qui précède, une limite lorsque n tend vers l'infini, nous disons, par abus de langage, que γ_j est la densité de j dans $\theta^\infty(i)$.

1.2.-Lemme

Chaque symbole j de P a la densité uniforme γ_j dans $\omega = \omega_{pq}$,

quelle que soit la bi-suite ω_{pq} de W_0 .

Démonstration

Soient $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$.

Si nous "coupons" ω en blocs $\theta^n(i)$, nous pouvons écrire

$$\omega(\alpha, \beta) = A_1 \theta^n [\omega(a) \omega(a+1) \dots \omega(a+b)] A_2$$

avec $\sup(\text{card } A_1, \text{card } A_2) < \sup_{i \in P} \lambda_i^{(n)}$, et où $\omega(a) \omega(a+1) \dots \omega(a+b)$ est un bloc de ω .

Si nous notons $N(j, \alpha, \beta)$ le nombre de fois où le symbole j apparaît dans le bloc $\omega(\alpha, \beta)$, ce symbole j aura la densité uniforme γ_j dans ω si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall \beta > N) (\forall \alpha) (|\frac{N(j, \alpha, \beta)}{\beta} - \gamma_j| < \varepsilon)$$

Soient α_0 et β_0 les entiers définis par

$$\omega(\alpha_0, \beta_0) = \theta^n(\omega(a) \omega(a+1) \dots \omega(a+b))$$

Alors

$$(1) \quad \left| \frac{N(j, \alpha_0, \beta_0)}{\beta_0} - \gamma_j \right| = \left| \frac{\sum_{k=a}^{a+b} \lambda_{\omega(k)j}^{(n)}}{\sum_{k=a}^{a+b} \lambda_{\omega(k)}^{(n)}} - \gamma_j \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour n suffisamment grand et quel que soit b (non nul) d'après le lemme I.1.

n étant alors fixé de manière à réaliser cette inégalité, on a :

$$(2) \quad \left| \frac{N(j, \alpha, \beta)}{\beta} - \frac{N(j, \alpha_0, \beta_0)}{\beta} \right| \leq \left| \frac{2 \sup_{i \in P} \lambda_i^{(n)}}{\beta} \right|$$

et

$$(3) \quad \left| \frac{N(j, \alpha_0, \beta_0)}{\beta} \right| \times \left| \frac{\beta_0}{\beta} - 1 \right| \leq \frac{2 \sup_{i \in P} \lambda_i^{(n)}}{\beta}$$

Chacune de ces deux expressions peut être rendue inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$ en choisissant β suffisamment grand.

Par addition membre à membre des expressions (1) (2) et (3) on obtient

$$\left| \frac{N(j, \alpha, \beta)}{\beta} - \gamma_j \right| < \varepsilon \quad \text{pour } \beta \text{ suffisamment grand,}$$

d'où la conclusion.

I.3. - Lemme

Chaque bloc sur P apparaissant dans ω a une densité uniforme dans ω .

Démonstration

$$\text{Posons} \quad K(n) = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} r_j^{(n)}(B) \gamma_j \lambda_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{r-1} \gamma_j \lambda_j^{(n)}} = \frac{K_1(n)}{K_2(n)}$$

où $r_j^{(n)}(B) = \frac{N[B, \theta^n(j)]}{\lambda_j^{(n)}}$ est la fréquence d'apparition du bloc B dans $\theta^n(j)$.

(On dit que le bloc B "apparaît" dans $\theta^n(j)$ à la place s si $\theta^n(j)(s, \text{card } B) = B$. Ceci suppose $s + \text{card } B \leq \lambda_j^{(n)}$).

Soit n tel que $\frac{\text{card } B}{\inf_{i \in P} \lambda_i^{(n)}} < \frac{\varepsilon}{3}$ ce qui est possible puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)} = \infty \quad \text{pour tout } i$$

Découpons alors ω en blocs $\theta^n(j)$.

Comme précédemment nous avons :

$$\omega(\alpha, \beta) = A_1 \theta^n [\omega(a) \omega(a+1) \dots \omega(a+b)] A_2$$

Soient :

N_1 : le nombre de fois où le bloc B apparaît dans un $\theta^n[\omega(k)]$
 $(a \leq k \leq a+b)$

N_2 : le nombre de fois où le bloc B apparaît dans $\omega(\alpha, \beta)$ avec son début dans $\theta^n[\omega(k)]$ et sa fin dans $\theta^n[\omega(k+1)]$ ($a \leq k < a+b$)

N_3 : le nombre de fois où le bloc B apparaît dans $\omega(\alpha, \beta)$ avec son début dans A_1 ou sa fin dans A_2

Alors

$$\frac{N(B, \alpha, \beta)}{\beta} = \frac{N_1}{\beta} + \frac{N_2}{\beta} + \frac{N_3}{\beta}$$

Majorons chacun de ces termes :

$$a) \quad \frac{N_2}{\beta} < \frac{b+1}{\beta} \text{ card } B < \frac{\text{card } B}{\inf_{i \in P} \lambda_i^{(n)}} \quad \text{car } \beta > (b+1) \inf_{i \in P} \lambda_i^{(n)}$$

$$\text{Donc } \frac{N_2}{\beta} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{d'après le choix de } n.$$

$$b) \quad \frac{N_3}{\beta} < \frac{\text{card } A_1 + \text{card } A_2}{\beta} < \frac{2 \sup_{i \in P} \lambda_i^{(n)}}{\beta} \\ \text{Donc } \frac{N_3}{\beta} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dès que } \beta > \frac{6 \sup_{i \in P} \lambda_i^{(n)}}{\varepsilon}$$

$$c) \quad \frac{N_1}{\beta} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=a}^{a+b} N[B, \theta^n(\omega(k))] = \frac{1}{\beta} \sum_{j=0}^{r-1} N[B, \theta^n(j)] \times N(j, a, b) \\ = \frac{b+1}{\beta} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{N(B, \theta^n(j))}{\lambda_j^{(n)}} \times \frac{N(j, a, b)}{b+1} \times \lambda_j^{(n)}$$

Nous pouvons écrire (lemme I.2) :

$$\frac{N(j, a, b)}{b+1} = \gamma_j + E_{j, a, b} \quad \text{avec } \lim_{b \rightarrow \infty} E_{j, a, b} = 0$$

et cette limite est uniforme en a .

$$\text{Comme } \beta = \sum_{j=0}^{r-1} N(j, a, b) \lambda_j^{(n)}, \text{ on déduit :}$$

$$\frac{\beta}{b+1} = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma_j \lambda_j^{(n)} + \sum_{j=0}^{r-1} E_{j, a, b} \lambda_j^{(n)}$$

On obtient alors

$$\left| \frac{N_1}{\beta} - K(n) \right| = \left| \frac{K_1(n) + \delta_1}{K_2(n) + \delta_2} - \frac{K_1(n)}{K_2(n)} \right|$$

avec

$$\delta_1 = \sum_{j=0}^{r-1} r_j^{(n)}(B) \lambda_j^{(n)} E_{j,a,b} \leq (\sup_{j \in P} E_{j,a,b}) \sum_{j=0}^{r-1} r_j^{(n)}(B) \lambda_j^{(n)}$$

$$\delta_2 = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j^{(n)} E_{j,a,b} \leq (\sup_{j \in P} E_{j,a,b}) \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j^{(n)}$$

Comme $\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{j \in P} E_{j,a,b} = 0$ uniformément par rapport à a et que, pour chaque n fixé, $\lim_{b \rightarrow \infty} b = \infty$, il existe β_1 tel que pour tout β supérieur à β_1 on ait :

$$\delta_1 < \frac{K_2 \varepsilon}{6} \quad \delta_2 < \frac{K_2^2 \varepsilon}{6K_1}$$

Il est alors aisé de montrer que

$$\left| \frac{K_1(n) + \delta_1}{K_2(n) + \delta_2} - \frac{K_1(n)}{K_2(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour tout ε positif on peut donc trouver n et β_0 tels que pour tout β supérieur à β_0 on ait

$$\left| \frac{N(B, \alpha, \beta)}{\beta} - K(n) \right| < \varepsilon$$

et ceci indépendamment de α .

Si β et β' sont supérieurs à β_0 on en déduit :

$$\left| \frac{N(B, \alpha, \beta)}{\beta} - \frac{N(B, \alpha, \beta')}{\beta'} \right| < 2 \varepsilon$$

La suite $\frac{N(B, \alpha, \beta)}{\beta}$ est donc une suite de Cauchy en β , uniformément par rapport à α .

Elle converge donc.

La densité de B dans ω existe et cette convergence est uniforme en α .

En particulier chaque bloc B apparaissant dans ω a une densité $r_j(B)$ dans $\theta^\infty(j)$.

I.4. Toute bi-suite ω_{pq} de W_0 est donc strictement transitive.

On peut donc énoncer le

Théorème

Les ensembles minimaux associés aux substitutions de longueur non constante sont strictement ergodiques.

Rappelons que la mesure ergodique unique sur O_ω est alors définie par sa valeur sur les cylindres et que celle-ci est donnée par

$$\mu(\tau[B]) = \mu(o[B]) = \delta(B)$$

où $\delta(B)$ désigne la densité du bloc B dans ω , soit encore

$$\mu(\tau[B]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_B [T^j \omega]$$

Plus généralement, si $f \in \mathcal{C}(O_\omega)$, nous aurons

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j \omega).$$

I.5 Nous nous proposons maintenant de montrer qu'il n'y a en général pas isomorphisme entre les substitutions de longueur constante et celles de longueur non constante.

Dans ce but nous allons tout d'abord démontrer le

Lemme

Les densités γ_j vérifient la relation $\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \gamma_j = r_1$ où r_1

est la valeur caractéristique maximale de la matrice M .

Démonstration

Nous avons, par définition :

$$((\lambda_{ij}^{(n+1)})) = ((\lambda_{ij}^{(n)})) ((\lambda_{ij}))$$

donc

$$\lambda_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{ik}^{(n)} \lambda_{kj}$$

et

$$\lambda_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{ik}^{(n)} \lambda_k$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i^{(n+1)}}{\lambda_i^{(n)}} = \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k \lambda_k$$

Nous avons également

$$\left(\frac{\lambda_i^{(n+1)}}{\lambda_i^{(n)}} \right) \times \left(\left(\frac{\lambda_{io}^{(n+1)}}{\lambda_i^{(n+1)}} \quad \frac{\lambda_{il}^{(n+1)}}{\lambda_i^{(n+1)}} \quad \dots \quad \frac{\lambda_{ir-1}^{(n+1)}}{\lambda_i^{(n+1)}} \right) \right) = \left(\left(\frac{\lambda_{io}^{(n)}}{\lambda_i^{(n)}} \quad \frac{\lambda_{il}^{(n)}}{\lambda_i^{(n)}} \quad \dots \quad \frac{\lambda_{ir-1}^{(n)}}{\lambda_i^{(n)}} \right) \right) \times M$$

Si nous faisons tendre n vers l'infini, il vient :

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k \lambda_k \right) ((\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{r-1})) = ((\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{r-1})) \times M$$

Multiplions à droite, chacun des membres par le vecteur colonne

$$z = \begin{pmatrix} \beta_{00} \\ \beta_{10} \\ \vdots \\ \beta_{r-10} \end{pmatrix}$$

vecteur propre z positif, associé à la plus grande valeur caractéristique

r_1 de M . On obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k \lambda_k \right) ((\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{r-1})) \begin{pmatrix} \beta_{00} \\ \beta_{10} \\ \vdots \\ \beta_{r-10} \end{pmatrix} = ((\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{r-1})) \cdot r_1 \begin{pmatrix} \beta_{00} \\ \vdots \\ \beta_{r-10} \end{pmatrix}$$

En simplifiant par le scalaire non nul

$$((\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{r-1})) \begin{pmatrix} \beta_{00} \\ \vdots \\ \beta_{r-10} \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k \lambda_k = r_1$$

Puisque $\mathbb{Z}$ est intégralement clos, le nombre réel r_1 est entier ou irrationnel (et il peut effectivement être l'un ou l'autre).

Comme les λ_k sont des entiers positifs, si r_1 est irrationnel c'est que l'un des γ_k au moins l'est.

Or dans le cas d'une substitution de longueur constante on sait [Klein 23] que tous les γ_k sont rationnels.

On obtient la

Proposition

Il n'existe pas d'homomorphisme d'un ensemble minimal associé à une substitution de longueur constante vers un ensemble minimal associé à une substitution de longueur non constante, lorsque la valeur propre maximale de la matrice associée n'est pas entière.

En effet, s'il existait un tel homomorphisme, on aurait

$$\mu_2(B) = \sum_{i=1}^s \mu_1(C_i)$$

pour un entier t et une famille de t -blocs $C_1, \dots, C_s$ apparaissant dans la substitution de longueur constante, μ_1 et μ_2 représentant les densités des blocs donc les mesures des cylindres dans les systèmes dynamiques correspondants.

En particulier on aurait

$$\gamma_{k_0} = \sum_{i=1}^s \mu_1(C_i)$$

ce qui est impossible pour γ_{k_0} irrationnel, car tous les $\mu_1(C_i)$ sont rationnels.

I.6.-Proposition

L'entropie du shift est nulle sur l'ensemble strictement ergodique associé à une substitution.

Posons $\xi_n = \inf_{i \in P} \lambda_i^{(n)}$ et $\eta_n = \sup_{i \in P} \lambda_i^{(n)}$

6.1.-Lemme

Pour chaque n , le nombre N_n de blocs de longueur ξ_n apparaissant dans ω est inférieur à $2 r^2 \eta_n$.

En effet, comme ω est une suite infinie de blocs $\theta^n(i)$ de longueurs $\lambda_i^{(n)}$ comprises entre ξ_n et η_n , tout bloc de longueur ξ_n apparaissant dans ω doit apparaître dans l'un des blocs $\theta^n(i) \theta^n(j)$

$$0 \leq i \leq r-1, \quad 0 \leq j \leq r-1$$

Il y a r^2 tels blocs et dans chacun d'eux il y a au plus $(2\eta_n - \xi_n)$ blocs de longueur ξ_n .

Le nombre N_n de blocs de longueur ξ_n dans ces r^2 blocs, donc dans ω , est inférieur à

$$r^2(2\eta_n - \xi_n) < 2 r^2 \eta_n$$

6.2.-Lemme

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{\xi_n}$ existe et est finie. Il suffit d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{\xi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{i \in P} \frac{\lambda_i^{(n)}}{r_1^n}}{\inf_{i \in P} \frac{\lambda_i^{(n)}}{r_1^n}} = \frac{\sup_{i \in P} \beta_{i_0}}{\inf_{i \in P} \beta_{i_0}}$$

6.3.-Démonstration de la proposition

La partition de $P^{\mathbb{Z}}$ en cylindres ${}_0[i]$ engendre la tribu $\mathcal{B}$ de $P^{\mathbb{Z}}$. Par conséquent, l'entropie de T sur l'orbite fermée de ω est donnée par l'entropie moyenne de cette partition.

Mais d'après le lemme 6.1., le nombre de cylindres de longueur ξ_n

de mesures positives est inférieur à $2 r^2 \eta_n$.

L'entropie moyenne de la partition considérée est donc inférieure à

$$\frac{\log 2 r^2 \eta_n}{\xi_n} = \frac{\log 2 r^2 \eta_n}{2 r^2 \eta_n} \cdot \frac{\eta_n}{\xi_n} \cdot 2 r^2$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{\xi_n}$ est finie, cette expression tend vers zéro quand n tend vers l'infini, donc l'entropie est nulle.

Cette proposition généralise un résultat de Keane [17] sur les suites de Morse.

I.7.-Substitution de longueur non constante dans une suite strictement ergodique

Soit θ une substitution de longueur $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$, injective.

Soit $\eta = \dots, \eta_{-1} \dot{\eta}_0 \eta_1 \dots$ un élément de $\Omega_p = P^{\mathbb{Z}}$.

Nous définissons la bi-suite $\theta(\eta)$ par :

$$\theta(\eta) = \dots \theta(\eta_{-1}) \dot{\theta}(\eta_0) \theta(\eta_1) \dots$$

[on a donc $\theta(\eta)(0) = \theta(\eta_0)(0)$]

Alors nous avons le

Lemme

Si η est strictement ergodique, $\theta(\eta)$ l'est et son entropie vérifie

$$\frac{1}{\max \lambda_i} h(\eta) < h(\theta(\eta)) < \frac{1}{\min \lambda_i} h(\eta).$$

Ce lemme est une généralisation au cas non constant d'un résultat de Grillenberger [9].

Démonstration

La presque périodicité de $\theta(\eta)$ est triviale car tout bloc B qui apparaît dans $\theta(\eta)$ est dans au moins un $\theta(\eta_i \eta_{i+1} \dots \eta_{i+j})$. Comme la suite η est presque périodique, le bloc $\eta_i \eta_{i+1} \dots \eta_{i+j}$ apparaît presque périodiquement dans η . Comme la longueur de la substitution est finie, la distance entre deux places successives d'apparition du bloc B dans $\theta(\eta)$ est bornée.

Pour montrer la transitivité stricte nous devons montrer que chaque bloc sur P , apparaissant dans $\theta(\eta)$ a une densité uniforme dans $\theta(\eta)$.

Soit $\mathcal{R}$ le réseau formé sur $\theta(\eta)$ par les blocs $\theta(\eta_i)$, $\eta_i \in \eta$. Nous noterons $\mathcal{R}_{s,t} = \{u \mid u \in \mathcal{R}, s \leq u < s+t\}$.

Quelque soit le bloc $S = \theta(b)$ apparaissant dans $\theta(\eta)$, la densité d'apparition de S dans $\theta(\eta)$ en un point du réseau $\mathcal{R}$, entre α et $\alpha + \beta$, converge lorsque β tend vers l'infini, uniformément par rapport à α , vers $\delta_\theta(S) = \frac{\delta(b)}{\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \delta_i}$ où $\delta(b)$ est la densité de b dans η .

En effet :

$$\frac{N[\theta(b), \alpha, \beta]}{\beta} = \frac{N[\theta(b), \alpha_0, \beta_0]}{\beta_0} \times \frac{\beta_0}{\beta}$$

où $\alpha_0 = \inf \{u \in \mathcal{R}, u \geq \alpha\}$

$$\beta_0 = \sup \{u \in \mathcal{R}, u < \alpha + \beta\}$$

et $\beta = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i N[i, \alpha_0, \beta_0] + h$ avec $0 \leq h < 2 \sup \lambda_i$

Alors

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i N[i, \alpha_0, \beta_0]}{\beta_0} + \frac{h}{\beta_0}$$

converge lorsque β_0 (donc β) tend vers l'infini uniformément par rapport

à α_0 vers $\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \delta(i)$ puisque η est strictement transitif.

Soit maintenant un bloc B apparaissant dans $\theta(\eta)$. Choisissons

n tel que $\lambda(B) < \frac{n}{\min \lambda_i}$.

Soit $\{\theta(b_n)\}_n$ l'ensemble des blocs images par θ des blocs b_n de longueur n apparaissant dans η . Si $S \in \{\theta(b_n)\}_n$, nous noterons $N[S, \mathcal{R}_{s,t}]$ le nombre de fois où S apparaît dans le réseau $\mathcal{R}$ entre les points $\theta(s)$ et $\theta(s+t) - \max \lambda_i$, et $N[B, S]$ le nombre de fois où B apparaît dans S .

On a

$$[n - [\lambda(B) + 2 \max \lambda_i]] \times N[B, s, t] \leq \sum_{S \in \{\theta(b_n)\}_n} N[B, S] \times N[S, \mathcal{R}_{s,t}] \leq n \cdot N[B, s, t]$$

Posant $k = \lambda(B) + 2 \max \lambda_i$, il vient :

$$\frac{1}{n} \sum_{S \in \{\theta(b_n)\}_n} N(B, S) \times \frac{N(S, \mathcal{R}_{s,t})}{t} \leq \frac{N(B, s, t)}{t} \leq \frac{1}{n-k} \sum_{S \in \{\theta(b_n)\}_n} N(B, S) \times \frac{N(S, \mathcal{R}_{s,t})}{t}$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{S \in \{\theta(b_n)\}_n} N(B, S) \times \delta_\theta(b) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(B, s, t)}{t} \leq \frac{1}{n-k} \sum_{S \in \{\theta(b_n)\}_n} N(B, S) \times \delta_\theta(b)$$

La différence entre les deux extrêmes tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N[B, s, t]}{t}$ existe uniformément par rapport à s .

Le résultat sur l'entropie résulte de la constatation que le nombre de blocs de longueur $\ell_0 \min \lambda_i$ (resp. $\ell_0 \max \lambda_i$) dans $\theta(\eta)$ est inférieur ou égal (resp. supérieur ou égal) au nombre de blocs de longueur ℓ_0 dans θ .

II.-ETUDE DES SUBSTITUTIONS AYANT POUR MATRICE :

$$M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

II.1.- Nous considérons ici les substitutions sur deux symboles que nous noterons 0 et 1 .

Il y a $(n+1)(n+2)$ substitutions admettant pour matrice $M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ et nous pouvons ranger ces substitutions en $(n+1)$ classes définies par

$$\begin{cases} \theta_p(0) = 0^{n+1-p} & 1 & 0^p \\ \theta_p(1) = 1 & 0^n \end{cases} \quad 0 \leq p \leq n$$

où l'on note $0^k = \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{k \text{ fois}}$

Les ensembles minimaux de substitution engendrés par les substitutions

$$\begin{cases} \theta(0) = 0^{n+1-p+q} & 1 & 0^{p-q} \\ \theta(1) = 0^q & 1 & 0^{n-q} \end{cases} \quad 0 \leq q \leq p$$

sont isomorphes à l'ensemble minimal engendré par la substitution θ_p .

En effet, d'après un argument déjà employé par Coven et Keane [4] , le bloc $\theta(0)$ apparaît dans $\theta_p(1) \theta_p(0)$ et le bloc $\theta(1)$ apparaît dans $\theta_p(0) \theta_p(1)$.

Donc tout bloc de O_θ apparaît dans O_{θ_p} et les ensembles sont égaux par minimalité.

D'autre part, à chaque substitution θ_p nous pouvons associer la substitution θ'_p définie par :

$$\begin{cases} \theta_p'(0) = 0^p \mid 0^{n+1-p} \\ \theta_p'(1) = 0^n \mid \end{cases}$$

Alors le système dynamique (O_{θ_p}, T) est isomorphe au système (O_{θ_p}, T^{-1}) , lui-même isomorphe à (O_{θ_p}, T) puisque T est un homéomorphisme de O_{θ_p} .

Donc (O_{θ_p}, T) et (O_{θ_p}, T) sont isomorphes.

Notons aussi que l'ensemble W_o de Gottschalk associé à une substitution θ_p est :

$$\begin{aligned} W_o &= \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\} \quad \text{si } p = 0 \\ W_o &= \{\omega_{00}, \omega_{01}\} \quad \text{si } 0 < p \leq n. \end{aligned}$$

II.2.- Proposition

La substitution définie par

$$\begin{cases} \theta^*(0) = 0^{n+1} \mid \\ \theta^*(1) = 0^n \mid \end{cases}$$

est discrète.

Cette substitution est isomorphe à θ_n , mais son ensemble W_o ne contient qu'un seul élément ω_{10} .

Nous allons montrer que la bisuite ω_{10} est "sturmiennne" au sens de Morse Hedlund [26], [10].

C'est un fait bien connu que toute suite sturmiennne est une suite "mécanique".

Nous rappelons que la suite mécanique engendrée par une rotation irrationnelle α_o ($0 < \alpha_o < 1$) et un intervalle semi-ouvert $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la suite ω définie par $\omega_k = 1_{\mathcal{A}}(k\alpha_o)$.

Nous allons montrer que la suite mécanique associée à α_o , où

α_0 est la racine comprise entre 0 et 1 de l'équation caractéristique $\alpha^{2-(n+2)}\alpha+1=0$ de la matrice M , et à l'intervalle $\mathcal{A} = [1-\alpha_0, 1[$ peut être engendrée par la substitution θ^* considérée.

$$\text{Si } k \alpha_0 \in [0, 1-(n+1)\alpha_0[$$

on a

$$\begin{cases} \omega_k = \omega_{k+1} = \dots = \omega_{k+n} = 0 \\ \omega_{k+n+1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } k \alpha_0 \in [1-(n+1)\alpha_0, 1-n\alpha_0-(1-(n+1)\alpha_0)[$$

soit

$$k \alpha_0 \in [1-(n+1)\alpha_0, \alpha_0[$$

on a

$$(k+n)\alpha_0 \in [1-\alpha_0, (n+1)\alpha_0[\subset [1-\alpha_0, 1[$$

donc

$$\begin{cases} \omega_k = \omega_{k+1} = \dots = \omega_{k+n-1} = 0 \\ \omega_{k+n} = 1 \end{cases}$$

Considérons alors la restriction de la transformation à l'intervalle $[0, \alpha_0[$ et posons

$$\omega' = 0 \quad \text{si } k \alpha_0 \in [0, 1-(n+1)\alpha_0[$$

$$\omega' = 1 \quad \text{si } k \alpha_0 \in [1-(n+1)\alpha_0, \alpha_0[$$

Comme α_0 vérifie $\alpha_0^{2-(n+2)}\alpha_0+1=0$ nous avons

$$\frac{1-(n+1)\alpha_0}{1-\alpha_0} = \frac{\alpha_0}{1}$$

donc la transformation induite sur $[0, \alpha_0[$ se déduit de la transformation sur $[0, 1[$ par une homothétie de rapport α_0 .

La suite ainsi obtenue est donc la même que la suite initiale ce qui prouve qu'elle est invariante par la substitution

$$\omega'_1 = 0 \rightarrow \omega_k = \omega_{k+1} = \dots = \omega_{k+n} = 0, \omega_{k+n+1} = 1$$

$$\omega'_1 = 1 \rightarrow \omega_k = \omega_{k+1} = \dots = \omega_{k+n-1} = 0, \omega_{k+n} = 1$$

soit

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0^{n+1} 1 \\ 1 \rightarrow 0^n 1 \end{cases}$$

L'application h qui au seul élément ω_{10} de W_0 associe 0 et telle que $h(T_\omega) = \alpha_0$ est donc 1-1 sur le complémentaire de l'ensemble de mesure nulle formé par les points extrémités A et B de $\mathcal{A}$ et leurs translatés par α_0 .

h définit donc un isomorphisme au sens de la mesure entre la substitution θ^* et le système dynamique défini sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par la rotation d'angle α_0 . Ce système dynamique étant à spectre discret, il en est de même de celui engendré par la substitution θ^* .

II.3.- Résultats topologiques relatifs aux substitutions $\theta = \theta_p$

Les résultats que nous allons énoncer ici sont dûs à John C. Martin [24].

Théorème

Le plus grand ensemble quotient équicontinu de O_θ , c'est-à-dire l'ensemble quotient O_θ/Σ où Σ est la relation de structure équicontinue sur O_θ , est isomorphe à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^)$ où α^* est la rotation sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $\alpha^*x \equiv x + \alpha \pmod{1}$ avec $\alpha \equiv \alpha_1 \pmod{1}$ où α_1 est la racine de module supérieur à 1 de l'équation caractéristique de la matrice M .*

Démonstration

Lemme 1.- Il existe un homomorphisme h de (O_θ, T) dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^*)$.

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^*)$ est minimal et h est défini sur l'orbite de ω par

$$h(T^n \omega) \equiv n \alpha \pmod{1}.$$

On montre alors que " $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n(k)} \omega$ existe" entraîne

" $\lim_{k \rightarrow \infty} n(k) \alpha \pmod{1}$ existe"

On prolonge alors h sur O_θ en posant

$$h \left[\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n(k)} \omega \right] \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} n(k) \alpha \pmod{1}$$

La suite $n(k) \alpha$ est de Cauchy, et on peut démontrer que h ainsi défini est continu.

Lemme 2. - Soit O_θ^* le plus grand facteur équicontinu de O_θ . Alors O_θ^* est isomorphe à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^*)$.

Considérons les caractères continus σ sur le groupe O_θ^* c'est-à-dire les applications continues σ de O_θ^* dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \pmod{1}$. Ceci est possible car sur O_θ^* on a une structure de groupe induite par le groupe de transformations (O_θ^*, T) où (O_θ^*, T) est un système dynamique équicontinu, T étant une isométrie inversible et O_θ^* contenant une orbite partout dense (cf. Halmos-Von Neumann [12]).

Un tel caractère équicontinu est déterminé par la donnée de sa valeur en $\pi T\omega$ où π est la projection canonique de O_θ sur O_θ^* .

Posons $\sigma(\pi T\omega) = \xi$.

Pour déterminer σ il nous suffit de déterminer ξ .

On démontre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_o^{(k)} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \equiv 0 \pmod{1}$.

Alors on peut poser $\lambda_o^{(k)} = m_k + \delta_k$ où $m_k \in \mathbb{Z}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$.

Or la matrice M est solution de son équation caractéristique (Théorème de Cayley-Hamilton). On en déduit

$$\lambda_o^{(k+2)} = (n+2) \lambda_o^{(k+1)} - \lambda_o^{(k)}$$

D'où

$$m_{k+2} = (n+2) m_{k+1} - m_k + \delta'_k \text{ avec } \lim_{k \rightarrow \infty} \delta'_k = 0$$

Comme les m_k sont entiers on en déduit $\delta'_k = 0$ pour k suffisamment grand. On peut donc supposer (en prenant une puissance convenable de θ) que cette équation a lieu pour tout k .

Alors il existe deux entiers j et j' et deux nombres rationnels r'_0 et r'_1 tels que

$$m_k = r'_0 \lambda_0^{(k+j)} + r'_1 \lambda_0^{(k+j')} \quad k \geq 0$$

d'où

$$\frac{m_k}{\lambda_0^{(k)}} = r'_0 \frac{\lambda_0^{(k+j)}}{\lambda_0^{(k)}} + r'_1 \frac{\lambda_0^{(k+j')}}{\lambda_0^{(k)}}$$

Or en diagonalisant la matrice M , il est aisé de montrer que $\lambda_0^{(i+1)} = \lambda_0^{(i)} \alpha_1 + C \alpha_0^n$

d'où

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{\lambda_0^{(k)}} = r'_0 \alpha_1^j + r'_1 \alpha_1^{j'}$$

$$\exists r_0 + r_1 \alpha_1 \pmod{1} \quad r_0 \in \mathbb{Q} \quad r_1 \in \mathbb{Q}$$

Mais $r_0 \in \mathbb{Z}$ et $r_1 \in \mathbb{Z}$ car $\lambda_0^{(k+1)} \lambda_1^{(k)} - \lambda_0^{(k)} \lambda_1^{(k+1)} = (-1)^k [\lambda_0^{(1)} \lambda_1^{(0)} - \lambda_0^{(0)} \lambda_1^{(1)}] = (-1)^k$

Donc $\xi \equiv r_1 \alpha_1 \pmod{1}$

Le groupe des caractères continus de O_θ^* est donc de la forme $(r\mathbb{Z} \alpha_1, +) \pmod{1}$.

Il est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^*)$.

II.4.- D'après ce qui précède, il existe donc un homomorphisme h de (O_θ, T) dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^*)$.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier cet homomorphisme. Plus précisément nous voulons montrer que cet homomorphisme est bijectif sur l'image réciproque d'un sous ensemble X de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de mesure 1.

Il est aisé de voir que h applique chacun des éléments de W_0 sur 0, donc que h est au moins $\text{card } W_0 - 1$ sur l'image réciproque de $\mathbb{Z} \alpha$.

Pour montrer que h est injectif sur l'image réciproque d'un

sous-ensemble X de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, nous devons montrer que l'existence de la limite de $n_k \alpha$ lorsque k tend vers l'infini, et l'appartenance de cette limite à un sous-ensemble de mesure 1, impliquent l'existence de la limite de $T^{n_k}_\omega$ lorsque k tend vers l'infini.

Or $T^{n_k}_\omega$ aura une limite si pour tout nombre entier R , $\omega(n_k)$ est centre d'un bloc fixé de longueur R , quel que soit k suffisamment grand.

Nous allons montrer ceci en déterminant les places de n_k dans les blocs $\theta^s(0)$ et $\theta^s(1)$ à l'aide de la décomposition en fraction continue modifiée de α .

Comme nous aurons montré, au préalable, que les blocs $\theta^s(0)$ et $\theta^s(1)$ coïncident presque partout si s est grand, nous en déduirons le résultat cherché.

II.5.- Coïncidences de la substitution θ_p $0 \leq p \leq n$

Définition

Etant donnée une substitution θ nous dirons que $k \in \mathbb{N}$ est une "*valeur de coïncidence*" si et seulement si $\omega_k^0 = \omega_k^1$ avec $\theta^\infty(0) = \omega_0^0 \omega_1^0 \dots \omega_k^0 \dots$ et $\theta^\infty(1) = \omega_0^1 \omega_1^1 \dots \omega_k^1 \dots$

Nous nous proposons d'étudier la répartition des valeurs de coïncidence de la substitution $\theta = \theta_p$. Pour cela nous allons engendrer simultanément les deux suites $\theta^\infty(0)$ et $\theta^\infty(1)$.

$$\text{Comme } \theta^\infty(0) = 0^{n+1-p} 1 0^p \dots$$

$$\text{et } \theta^\infty(1) = 1 0^n \dots = 1 0^{n+1-p} \dots$$

nous avons :

$$\theta^\infty(0) = \theta^\infty(0^{n+1-p} 1)$$

$$\text{et } \theta^\infty(1) = \theta^\infty(1 0^{n+1-p})$$

Or les longueurs des blocs $\theta^k(0^{n+1-p} 1)$ et $\theta^k(1 0^{n+1-p})$

sont les mêmes pour tout k puisqu'ils contiennent le même nombre de 0 et le même nombre de 1. Nous pouvons donc les construire simultanément.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0^{n+1-p} & 1 \\ 1 & 0^{n+1-p} \end{pmatrix}$$

$$\text{Posons } \hat{\theta}(A) = \begin{pmatrix} \theta(0^{n+1-p} & 1) \\ \theta(1 & 0^{n+1-p}) \end{pmatrix}$$

et d'une manière générale, si $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$, K_1 et K_2 ayant mêmes nombres de 0 et de 1, posons

$$\hat{\theta}(K) = \begin{pmatrix} \theta(K_1) \\ \theta(K_2) \end{pmatrix}$$

Introduisons les blocs

$$\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0^{n-p} & 1 \\ 1 & 0^{n-p} \end{pmatrix}$$

Pour l'étude des coïncidences, un bloc $\begin{pmatrix} 0^k & 1 \\ 1 & 0^k \end{pmatrix}$ ne se distingue pas d'un bloc $\begin{pmatrix} 1 & 0^k \\ 0^k & 1 \end{pmatrix}$. Nous les confondrons donc.

Nous allons montrer que la suite $\hat{\theta}^{\mathcal{O}}(A)$ s'obtient à l'aide d'une substitution sur les blocs $\hat{0}$, $\hat{1}$, A , B et C . Ces cinq blocs seront appelés blocs fondamentaux de la substitution θ .

On obtient aisément les résultats suivants :

$$\hat{\theta}(\hat{0}) = \hat{0}^{n+1-p} \hat{1} \hat{0}^p$$

$$\hat{\theta}(\hat{1}) = \hat{1} \hat{0}^n$$

$$\text{a) } p = n \quad \hat{\theta}(A) = A \hat{0}^n \hat{1} \hat{0}^n$$

$$\text{b) } p = n-1 \quad \begin{aligned} \hat{\theta}(A) &= A \hat{0}^n B \hat{0}^{n-1} B \hat{0}^{n-1} \\ \hat{\theta}(B) &= A \hat{0}^{n-1} B \hat{0}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p < n-1 \quad \hat{\theta}(A) &= A (\hat{0}^n B)^{n-p} \hat{0}^p C \hat{0}^p \\ \hat{\theta}(B) &= A \hat{0}^p C \hat{0}^p \\ \hat{\theta}(C) &= A (\hat{0}^n B)^{n-p-1} \hat{0}^p C \hat{0}^p \end{aligned}$$

Dans le cas $p = n$ les valeurs de coïncidence sont les entiers supérieurs à 2.

Dans les autres cas un calcul simple montre que la matrice associée à la substitution $\hat{\theta}$ a pour valeur caractéristique maximale, la valeur caractéristique maximale de la matrice $M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

Les nombres de valeurs de coïncidence dans les blocs fondamentaux sont respectivement :

$$n(\hat{O}) = n(\hat{I}) = 1$$

$$n(A) = n-p$$

$$n(B) = 0$$

$$n(C) = n-p-1$$

et les longueurs de ces blocs fondamentaux sont

$$\ell(\hat{O}) = \ell(\hat{I}) = 1$$

$$\ell(A) = n-p+2$$

$$\ell(B) = 2$$

$$\ell(C) = n-p+1 .$$

La densité ' δ_c des valeurs de coïncidence de la substitution θ est donc :

$$\delta_c = \frac{1 \, d(\hat{O}) + 1 \, d(\hat{I}) + (n-p) \, d(A) + 0 \, d(B) + (n-p-1) \, d(C)}{1 \, d(\hat{O}) + 1 \, d(\hat{I}) + (n-p+2) \, d(A) + 2 \, d(B) + (n-p+1) \, d(C)}$$

où les $d(K)$ sont les densités des blocs fondamentaux K dans $\hat{\theta}^\infty(A)$.

En effet si l'on prend un bloc de "longueur" M dans $\hat{\theta}^\infty(A)$ il contient asymptotiquement $d(K) \times N$ blocs K et la longueur du bloc correspondant dans $\theta^\infty(0)$ ou $\theta^\infty(1)$ est asymptotiquement

$$N_o = \sum_K d(K) \ell(K) .$$

Or les blocs fondamentaux K distincts de $\hat{O}$ et $\hat{I}$ ont une densité nulle dans $\hat{\theta}^\infty(A)$. Démontrons ceci dans le cas général $p < n-1$. La matrice associée à la substitution $\hat{\theta}$ sur les blocs fondamentaux est :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n(n-p)+2p & 0 & 1 & n-p & 1 \\ 2p & 0 & 1 & 0 & 1 \\ n(n-p-1)+2p & 0 & 1 & n-p-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & 0 \\ \hat{M}(1) & \hat{M}_2 \end{pmatrix}$$

et en effectuant un produit de matrices par blocs :

$$\hat{M}^k = \begin{pmatrix} \hat{M}_1^k & 0 \\ \hat{M}(k) & \hat{M}_2^k \end{pmatrix}$$

Or la matrice $\hat{M}_2^2$ est positive. On peut donc lui appliquer le théorème de Perron-Frobenius : $\frac{\hat{M}_2^k}{r_2^k}$ converge vers une matrice $\hat{M}'_0$, lorsque k tend vers l'infini, si r_2 désigne la valeur caractéristique maximale de $\hat{M}_2$.

Comme

$$\frac{\hat{M}^k}{r_1^k} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{M}_1^k}{r_1^k} & 0 \\ \frac{\hat{M}(k)}{r_1^k} & \frac{\hat{M}_2^k}{r_2^k} \times \frac{r_2^k}{r_1^k} \end{pmatrix}$$

et que $|r_2| < |r_1|$, $\frac{\hat{M}^k}{r_1^k}$ converge vers une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ M_1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la conclusion.

(Dans le cas $p = n-1$, la démonstration est analogue.)

On obtient alors :

$$\delta_c = \frac{1 \, d(\hat{0}) + 1 \, d(\hat{1})}{1 \, d(\hat{0}) + 1 \, d(\hat{1})} = 1$$

d'où le : Lemme :

la densité δ_c des valeurs de coïncidence de la substitution θ_p est 1 .

II.6.- Systèmes dynamiques associés au nombre irrationnel α

II.6.1.- Aux substitutions θ_p de longueur non constante définies par

$$\theta_p(0) = 0^{n+1-p} 1 0^p$$

$$\theta_p(1) = 1 0^n$$

nous avons associé la matrice $M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 - (n+2)\lambda + 1 = 0$.

La valeur caractéristique α , de module inférieur à 1 , de la matrice M vérifie $\alpha = \frac{1}{n+2-\alpha}$.

Elle admet donc le développement en fraction continue modifiée :

$$\alpha = \frac{1}{n+2 - \frac{1}{n+2 - \frac{1}{n+2 \dots}}} = (n+2, n+2, \dots)$$

(cf. Keane [20])

Les blocs critiques au sens de Keane sont alors les blocs $(n, n, \dots, n, n+1)$ et les blocs non admissibles sont les blocs $(n+1, n, n, \dots, n, n+1)$.

Une suite $w \in \{0, 1, \dots, n+1\}^{\mathbb{N}}$ est admissible, si elle ne contient pas de blocs non admissibles.

Nous noterons W_α l'ensemble des suites α -admissibles et nous poserons

$$w = w_1 w_2 \dots w_i \dots$$

si $w \in W_\alpha$.

Une suite est k -critique si $w_1 w_2 \dots w_k$ est un bloc critique.

Une suite est non critique s'il n'existe pas k tel qu'elle soit k -critique.

W_α est un sous-ensemble compact de l'ensemble compact $\{0,1,\dots,n+1\}^{\mathbb{N}}$ car l'ensemble des w tels que $w_i, w_{i+1}, \dots, w_{i+k}$ soit admissible est une union finie de cylindres et W_α est l'intersection de tous ces ensembles.

On définit l'application φ_α de W_α dans lui-même par

$$w' = \varphi_\alpha(w) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} w'_1 = w_1 + 1 \\ w'_j = w_j, \quad j \geq 2 \end{cases} \text{ si } w \text{ est non critique. (cette suite } w' \text{ est admissible, sinon } w \text{ serait } k\text{-critique).}$$

et

$$\begin{cases} w'_i = 0 & i \leq k \\ w'_{k+1} = w_{k+1} + 1 \\ w'_j = w_j & j \geq k+2 \end{cases} \text{ si } w \text{ est } k\text{-critique. (cette suite } w' \text{ est admissible car si } w \text{ est } k\text{-critique, aucun bloc } w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_j \text{ ne peut être critique).}$$

Nous rappelons que :

- a) φ_α est injective et seule la suite $\tilde{w} = (0,0,0,\dots)$ n'a pas d'image réciproque
- b) φ_α est continue car elle change au plus k coordonnées et il existe un voisinage de toute suite non critique (resp. k -critique) formé de suites non-critiques (resp. k -critiques) sauf pour la suite $\bar{w} = (n,n,\dots)$

Le couple $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ est un système dynamique.

II.6.2.- Base irrationnelle

Définissons une application ψ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble W_α des

suites admissibles par

$$\psi(1) = \widetilde{W} = (0, 0, \dots)$$

et

$$\psi(n+1) = \varphi_{\alpha}^n[\widetilde{W}]$$

Soit $\psi(C_p)$ la p-ième suite critique.

On a $\psi(C_1) = (n+1, 0, \dots)$, donc $C_1 = n+2$.

Puis on a

$$\psi(C_p) = w_1 w_2 \dots$$

avec $w_1 = w_2 = \dots = w_{p-1} = n$, $w_p = n+1$, $w_i = 0$ si $i > p+1$

et

$$\psi(C_{p+1}) = w'_1 w'_2 \dots$$

avec

$$w'_1 = w'_2 = \dots = w'_{p-1} = w'_p = n, w'_{p+1} = n+1, w'_i = 0 \text{ si } i > p+2$$

Il est alors aisé de montrer que

$$C_{p+1} = (n+1) C_p + n \sum_{i=1}^{p-1} C_i$$

d'où l'on déduit

$$C_{p+1} = (n+2) C_p - C_{p-1}$$

avec $C_0 = 0$

$$C_1 = 1$$

Evaluation asymptotique de C_p :

La suite C_p est une suite récurrente à 2 termes appartenant à l'espace vectoriel de dimension 2 dont une base est formée des solutions α^n et $(\frac{1}{\alpha})^n$.

On en déduit que $C_n \alpha^n$ est borné.

Réciproquement à toute suite w admissible nous associerons un nouvel objet que nous noterons $\sum_{i=1}^{\infty} w_i C_i$ et nous dirons que le nouvel ensemble ainsi formé est l'ensemble des *entiers α -adiques* ($\alpha \notin 0$) :

$$Z(\alpha) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} w_i C_i \mid (w_i) \in W_{\alpha} \right\}$$

Cet ensemble contient $\mathbb{Z}$ mais ne peut être considéré comme complétion du corps des nombres rationnels puisque les seuls métriques possibles sur l'ensemble des rationnels sont la métrique usuelle et les métriques p-adiques pour p entier premier quelconque [Borevitch-Chafarevitch] [3]

Il serait donc intéressant de voir comment on peut construire $Z(\alpha)$ à partir de $\mathbb{Z}$, ce à quoi nous n'avons pu aboutir jusqu'à présent.

Nous dirons que $\{C_i\}$ forment une "base irrationnelle" et les calculs sur les nombres entiers peuvent s'effectuer dans cette base irrationnelle avec "retenue non constante" ou retenue flottante.

L'algorithme n'est cependant pas aussi simple que dans le cas d'une base rationnelle.

II.6.3.-Etude des cylindres de W_{α}

Nous savons (Keane [20]) que nous pouvons considérer l'application de l'ensemble W_{α} des suites α -admissibles dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, définie par :

$$\pi(W) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_k C_k) \alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k w_k \pmod{1}$$

Cette application π est surjective, 1-1 sauf sur un ensemble dénombrable où elle est 2-1 (cet ensemble est l'image réciproque de $\mathbb{Z}_{\alpha} \pmod{1}$).

L'application π est continue et :

$$\pi \circ \varphi_{\alpha} = \alpha^* \circ \pi$$

où α^* est la rotation de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\alpha^*(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}.$$

La suite $w = \pi^{-1}(x)$ est appelée l' α -développement de x , ou encore le développement de x dans la base irrationnelle α .

Si nous considérons l'ordre lexicographique " $<$ " sur W_α , défini par

$$w < w' \Leftrightarrow w_i < w'_i \text{ où } i = \inf \{j | w_j \neq w'_j\}$$

l'application π est croissante de $(W_\alpha, <)$ sur $[0,1[$ muni de l'ordre naturel.

Soit k fixé.

Nous pouvons classer lexicographiquement les suites finies de W_α correspondant aux entiers $n = \sum_{i=1}^k w_i C_i$ où (w_i) est admissible.

Les images sur $[0,1[$ de ces points sont alors classées dans un ordre croissant et chacun des intervalles ainsi défini est l'image du cylindre de base le bloc $w_1 \dots w_k$ associé au nombre n correspondant.

La mesure image par π d'un tel cylindre est donc la longueur de l'intervalle correspondant.

Si $w_j = n+1$ et $w_i = n$ pour $j < i \leq k$, l'élément suivant, dans l'ordre lexicographique, parmi les blocs $w_1 \dots w_k$ est défini par :

$$\begin{cases} w'_i = w_i & \text{pour } i < j-1 \\ w'_{j-1} = 1 \\ w'_i = 0 & \text{pour } j \leq i \leq k. \end{cases}$$

La mesure de l'intervalle correspondant est donc

$$\mu([k_i, k_{i+1}[) = \alpha^{j-1-(n+1)} \alpha^j - \sum_{s=j+1}^k n \alpha^s = \frac{\alpha^k(1-\alpha)}{\alpha^{2-(n+2)\alpha+1}} \text{ en utilisant la relation } \alpha^{2-(n+2)\alpha+1} = 0.$$

Sinon l'élément qui suit lexicographiquement le bloc $w_1 \dots w_k$ est donné par :

$$\begin{cases} w'_i = w_i & \text{pour } i < k \\ w'_k = w_k + 1 \end{cases}$$

et la mesure de l'intervalle correspondant à $\underline{\alpha^k}$.

II.6.4.- Suites admissibles ne contenant pas une infinité de fois le bloc 0 0

II.6.4.1. Etudions d'abord l'ensemble des suites admissibles ne contenant pas le bloc 0 0 .

Soient p_m, q_m, r_m, s_m les nombres de blocs admissibles de longueur m , ne contenant pas 0 0, se terminant respectivement par 0, $i (1 \leq i < n)$, n et $n+1$.

Pour obtenir les blocs admissibles de longueur $m+1$, ne contenant pas 0 0, on peut ajouter :

i, n ou $n+1$ après chaque bloc se terminant par 0

0, i, n ou $n+1$ après chaque bloc se terminant par $i (1 \leq i < n)$

0, i, n après chaque bloc se terminant par n

$n+1$ après chaque bloc se terminant par n sans se terminer par

$n+1, n, n, \dots, n$

Il y a $(r_m - \sum_{i=1}^{m-1} s_i)$ tels blocs.

0, i, n après chaque bloc se terminant par $n+1$.

On obtient les relations de récurrence :

$$p_{m+1} = q_m + r_m + s_m$$

$$q_{m+1} = (n-1) (p_m + q_m + r_m + s_m)$$

$$r_{m+1} = p_m + q_m + r_m + s_m$$

$$s_{m+1} = p_m + q_m + r_m - \sum_{i=1}^{m-1} s_i.$$

On en déduit $r_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} s_i$ donc $s_{m+1} = p_m + q_m + s_m$.

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} p_{m+1} \\ q_{m+1} \\ r_{m+1} \\ s_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \\ r_m \\ s_m \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice carrée est

$$\lambda \left[\lambda^3 - (n+1)\lambda^2 - n\lambda + 1 \right]$$

dont la plus grande racine en valeur absolue λ_1 est inférieure à $\frac{1}{\alpha}$.

Le nombre N_m^{00} de blocs admissibles de longueur m ne contenant pas 00 est donc équivalent à $K \cdot \lambda_1^m$ avec $|\lambda_1| < \frac{1}{\alpha}$ pour m assez grand et K constant.

Le nombre total de blocs admissibles de longueur m étant C_m , et $C_m \alpha^m$ étant borné (II.6.2), on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{N_m^{00}}{C_m} = 0$$

Les suites admissibles ne contenant pas le bloc 00 forment donc un ensemble de mesure nulle.

II.6.4.2.- Lemme

L'ensemble des blocs admissibles ne contenant pas une infinité de fois le bloc 00 est de mesure nulle.

Démonstration

Soit $\tilde{S}$ cet ensemble.

$$\tilde{S} = \{ w \mid w \in W_\alpha, \exists m_0 \forall m > m_0 \quad w_m w_{m+1} \neq 00 \}$$

$$\text{Donc } \tilde{S} = \bigcup_{m_0 \in \mathbb{N}} \tilde{S}_{m_0}$$

$$\text{avec } \tilde{S}_{m_0} = \{ w \mid \forall m > m_0, w_m w_{m+1} \neq 00 \}.$$

Soit m_0 fixé. Le nombre N_{m_0+m} de blocs admissibles de longueur m_0+m , ne contenant pas 00 après w_{m_0} est inférieur à $C_{m_0} N^{00}$ car après chaque bloc admissible de longueur m_0 on pourra mettre au plus N_m^{00} blocs de longueur m ne contenant pas 00 .

Le nombre total de blocs admissibles de longueur m_0+m étant

C_{m_0+m} on a

$$\frac{N_{m_0+m}}{C_{m_0+m}} < \frac{C_{m_0} N_m^{OO}}{C_{m_0+m}} = \frac{C_{m_0} C_m}{C_{m_0+m}} \frac{N_m^{OO}}{C_m}$$

La suite (C_m) étant une suite récurrente à deux termes, nous avons déjà vu que C_m est équivalent à $\frac{K}{\alpha^m}$ lorsque m tend vers l'infini.

$\frac{C_{m_0} C_m}{C_{m_0+m}}$ a donc une limite finie, et, pour m_0 fixé, l'ensem-

ble des suites admissibles ne contenant pas de bloc 00 après w_{m_0} a une mesure nulle.

$\tilde{S}$ étant une union dénombrable de tels ensembles est aussi de mesure nulle.

Si on pose $S = \{\beta \mid \beta = \sum w_i \alpha^i, w_i \in \tilde{S}\}$ on a $\mu(S) = 0$. Donc S est un sous ensemble de $[0,1[$ de mesure nulle.

II.7.- A tout nombre R nous pouvons associer l'ensemble des valeurs R -coïncidentes de la substitution θ en définissant une *valeur R -coïncidente* comme un entier centre d'un intervalle de longueur $2R$ sur lequel $\theta^\infty(0)$ et $\theta^\infty(1)$ coïncident.

Comme l'ensemble des valeurs coïncidentes de la substitution θ est de densité 1 il en est de même pour tout R de l'ensemble des valeurs R -coïncidentes.

R étant fixé, nous noterons $\mathcal{R}_R$ l'ensemble des valeurs R -coïncidentes.

D'autre part, nous savons que à tout nombre $\beta \in [0,1[\setminus \mathbb{Z}\alpha$ nous pouvons associer une et une seule décomposition de la forme $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \alpha^i$ où $(w_i) \in W_\alpha$. Nous noterons alors $\tilde{\beta}_m$ le nombre entier

$$\tilde{\beta}_m = \sum_{i=1}^m w_i C_i.$$

Nous avons alors le

Lemme : Soit $\bar{X} = \{\beta \in [0,1[\setminus Z_\alpha \mid (\forall R \in \mathbb{N}) (\exists m_0 \in \mathbb{N}) (m > m_0 \implies \tilde{\beta}_m \in \mathbb{R}_R)\}$

Alors on a

$$\mu(X) = 1 .$$

Démonstration

On a

$$\bar{X} = \bigcap_{[0,1[\setminus Z_\alpha} X = \{\beta \mid (\exists R), (\forall m_0), (\exists m > m_0) ((\tilde{\beta}_m^{-R}, \tilde{\beta}_m^{+R}) \cap X_0 \neq \emptyset)\}$$

où

$$X_0 = \bigcap_{\mathbb{N}} \mathbb{R}_0$$

est l'ensemble des valeurs de non-coïncidence entre $\theta^\infty(0)$ et $\theta^\infty(1)$.

Si nous posons

$$X_0^R = \bigcup_{r=-R}^{+R} (X_0 + r) ,$$

nous pouvons écrire

$$\bar{X} = \{\beta \mid (\exists R) (\forall m_0) (\exists m > m_0), (\tilde{\beta}_m \in X_0^R)\}$$

soit encore

$$\bar{X} = \bigcup_{R \in \mathbb{N}} \bigcap_{m_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > m_0} \{\beta \mid \tilde{\beta}_m \in X_0^R\}$$

Soit m donné. Considérons la subdivision (n_i) de $[0,1[$ obtenue en réordonnant lexicographiquement les nombres $\sum_{i=1}^m w_i C_i$ où $(w_i) \in W_\alpha$.

Alors

$$\mu\{\beta \mid \tilde{\beta}_m \in X_0^R\} = \sum_{i \in [0, C_m[\cap X_0^R} (n_{i+1} - n_i) .$$

Mais l'étude des cylindres de w_α nous a montré que

$$n_{i+1} - n_i < \sup [\alpha^m(1-\alpha), \alpha^m] = \alpha^m$$

Comme les C_m intervalles de longueur α^m et $\alpha^m(1-\alpha)$ forment une partition de $[0,1[$ on a

$$C_m \alpha^m(1-\alpha) < 1$$

D'où

$$\mu\{\beta|\tilde{\beta}_m \in X_O^R\} \leq \alpha^m \times \frac{1}{C_m \alpha^m (1-\alpha)} \times \text{card} [(0, C_m) \cap X_O^R]$$

Or

$$\frac{\text{card} [(0, C_m) \cap X_O^R]}{C_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2R(1-\delta_C) = 0$$

Alors il existe une constante S tel que

$$\mu\left(\bigcup_{m \geq m_0} \{\beta|\tilde{\beta}_m \in X_O^R\}\right) \leq S \sum_{m \geq m_0} \frac{\text{card} [(0, C_m) \cap X_O^R]}{C_m}$$

Or l'étude des coïncidences de $\theta^\infty(0)$ et $\theta^\infty(1)$ en II.5.

nous montre que la densité des valeurs de non coïncidence entre 0 et C_m tend vers zéro comme $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^m$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On a donc

$$\mu\left(\bigcap_{m_0} \bigcup_{m \geq m_0} \{\beta|\tilde{\beta}_m \in X_O^R\}\right) = 0$$

et $\mu(\bar{X}) = 0$ puisqu'il s'agit d'une union dénombrable.

II.8.-Etude des places de $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$ dans la suite $\theta^\infty(0)$.

II.8.1. Désignons par S_ℓ l'ensemble des nombres entiers qui s'écrivent

$x = \sum_{i=1}^r w_i C_i$ où w_i est un bloc admissible et par R_ℓ^O l'ensemble des extrémités des intervalles $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$ dans la suite $\theta_0^\infty(0)$ engendrée par la substitution

$$\begin{cases} \theta_0(0) = 0^{n+1} 1 \\ \theta_0(1) = 0^n 1 \end{cases}$$

Nous avons le

Lemme : $x \in S_\ell \implies x \in R_\ell^O$

Nous avons déjà remarqué en II.3. que la longueur $\lambda_o^{(\ell)}$ du bloc $\theta^\ell(0)$ vérifie la relation

$$\lambda_o^{(\ell)} = (n+2) \lambda_o^{(\ell-1)} - \lambda_o^{(\ell-2)}$$

avec

$$\lambda_o^{(0)} = 1$$

$$\lambda_o^{(1)} = n + 2$$

On a donc pour tout ℓ : $\lambda_o^{(\ell)} = C_{\ell+1}$.

Soit alors $x = \sum_{i=\ell+1}^r w_i c_i$.

Nous allons "placer" x dans la suite $\theta^\infty(0)$, en partant de son terme le plus grand.

Si $\sum_{i=k}^r w_i c_i$ est au début d'un $\theta^{k-1}(0)$, alors $\sum_{i=k-1}^r w_i c_i$ est au début d'un $\theta^{k-2}(0)$ si $w_{k-1} < n+1$ et au début d'un $\theta^{k-2}(1)$ si $w_{k-1} = n+1$.

Si $\sum_{i=k}^r w_i c_i$ est au début d'un $\theta^{k-2}(1)$, on a nécessairement $w_{k-2} \leq n$, sinon le bloc (w_i) ne serait pas admissible.

Alors si $w_{k-2} < n$, $\sum_{i=k-2}^r w_i c_i$ est au début d'un $\theta^{k-3}(0)$ et on est dans le cas initial.

Si $w_{k-2} = n$, $\sum_{i=k-2}^r w_i c_i$ est au début d'un $\theta^{k-3}(1)$ mais comme le bloc (w_i) est admissible, on aura $w_{k-3} \leq n$.

On a donc toujours $\sum_{i=\ell+1}^r w_i c_i \in R_\ell^0$.

En particulier $x \in S_1 \implies x \in R_1^0$. Donc tous les nombres entiers qui ont un α -développement qui commence par 0 sont dans R_1^0 .

La réciproque est d'ailleurs vraie d'après II.6.2.

La suite ω^0 définie par $\omega^0(k) = 0$ si $k = \sum_{i=2}^\infty w_i c_i$ et $\omega^0(k)=1$ si $k = \sum_{i=2}^\infty w_i c_i$ avec $w_1 \neq 0$ est identique à la suite engendrée par la substitution sturmienne $\theta(0) = 0^{n+1} 1$
 $\theta(1) = 0^n 1$

II.8.2.- Soit maintenant R_ℓ le réseau obtenu en décomposant $\theta^\infty(0)$ en blocs $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$ avec $\theta = \theta_p$, soit

$$\theta(0) = \begin{pmatrix} 0^{n+1-p} & 1 \\ 1 & 0^p \end{pmatrix}$$

$$\theta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0^n \end{pmatrix}$$

Nous avons le

Lemme : $R_\ell^0 \subset R_{\ell-1}$

Pour démontrer ce lemme nous allons engendrer simultanément les deux suites $\theta_0^\infty(0)$ et $\theta^\infty(0)$ selon la technique du paragraphe II.5.

Posons

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0^p & 1 \\ 1 & 0^p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0^{n+1} & 1 \\ 1 & 0^{n+1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0^{p+1} & 1 \\ 1 & 0^{p+1} \end{pmatrix}$$

On a

$$\hat{\theta}(\hat{O}) = \hat{O}^{n+1-p} A$$

$$\hat{\theta}(A) = B(\hat{O}^{n-p} C)^{p-1} \hat{O}^{n-p} A$$

$$\hat{\theta}(B) = B(\hat{O}^{n-p} C)^p \hat{O}^{n-p} A$$

$$\hat{\theta}(C) = B(\hat{O}^{n-p} C)^n \hat{O}^{n-p} A.$$

Soit alors $x \in R_\ell$. x est donc un point du réseau obtenu en décomposant $\theta^\infty(0)$ en blocs $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$.

Or les blocs B , $\hat{O}^{n-p} C$ et $\hat{O}^{n-p} A$ coïncident avec les blocs $\theta_0(0)$ et $\theta_0(1)$.

Si nous appelons $\hat{R}_\ell$ le réseau de décomposition de $\hat{\theta}^\infty(\hat{O})$ en blocs $\hat{\theta}^{\ell-1}(K)$ où K est un des symboles $\hat{O}$, A , B ou C , on obtient en particulier les points de décomposition de $\theta_0^\infty(0)$ en blocs $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$.

Le réseau R_ℓ^0 est donc inclus dans le réseau $\hat{R}_{\ell-1}$.

Soit $x \in R_\ell^0$. x est soit au début d'un bloc $\hat{\theta}^\ell(K)$ soit à l'intérieur d'un des blocs A , B ou C .

Dans le premier cas on a $x \in R_\ell$.

Si x est dans un bloc K on a

$$\theta_o^\ell(0^k 1) = \theta_o^{\ell-1}(0^{n+1} 1 0^{n+1} 1 \dots 0^{n+1} 1 1 0^n)$$

et

$$\theta^\ell(1 0^k) = \theta^{\ell-1}(1 0^n 0^{n+1-p} 1 0^p \dots 0^{n+1-p} 1 0^p) .$$

Comme $x \in R_\ell^o$ on se trouve dans l'une des places extrémités de $[0^{n+1} 1]^s$ ($1 \leq s \leq k$) dans $\theta_o^{\ell-1}(0^{n+1} 1 0^{n+1} 1 \dots 0^{n+1} 1 1 0^n)$.

En effectuant un regroupement des termes de $\theta^\ell(1 0^{n+1})$ on constate aisément que x est un point du réseau $R_{\ell-1}$.

Des deux lemmes précédents on déduit le

Lemme : $x \in S_\ell \implies x \in R_{\ell-1}$

II.9.-Proposition

L'application h définie en II.3. est injective sur l'image réciproque d'un sous ensemble de $R/\mathbb{Z}$ de mesure 1.

Démonstration

Nous allons montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \alpha = \beta \in X \cap S^c \implies \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k} \omega \text{ existe.}$$

Soit $\beta \in X \cap S^c$.

β a un développement unique $\tilde{\beta}$ dans la base irrationnelle α .

$$\text{Soit } \tilde{\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\beta) c_i$$

(Comme $X \cap \mathbb{Z}\alpha = \emptyset$, ce développement $\tilde{\beta}$ de β est unique) Si

$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \alpha = \beta$, le développement de n_k dans la base irrationnelle α tend vers celui de β donc pour tout m positif on peut trouver K tel que si

$k > K$, les m premiers termes des développements de n_k et β soient les mêmes.

On a donc :

$$(\forall m \geq 0), (\exists K) (k > K \implies n_k - \sum_{i=1}^m w_i(\beta) c_i \in S_m) .$$

Nous poserons

$$\tilde{\beta}_m = \sum_{i=1}^m w_i(\beta) c_i$$

Du lemme du paragraphe II.8.2, nous déduisons

$$n_k - \tilde{\beta}_m \in R_{m-1}$$

Autrement dit les $n_k - \tilde{\beta}_m$ sont des origines de $\theta^{m-1}(0)$ ou de $\theta^{m-1}(1)$ dans $\theta^\infty(0)$.

Par conséquent les nombres $n_k = (n_k - \tilde{\beta}_m) + \tilde{\beta}_m$ occupent des places fixes $\tilde{\beta}_m$ à partir des extrémités de $\theta^{m-1}(0)$ ou de $\theta^{m-1}(1)$.

Mais si $\beta \in S^c$, on peut choisir une infinité de m pour lesquels $w_{m-1}(\beta) = w_m(\beta) = 0$ ce qui entraîne $\tilde{\beta}_m \leq c_{m-1} = \lambda_0^{(m-2)} < \lambda_1^{(m-1)}$.

Les $\tilde{\beta}_m$ correspondants sont alors dans $\theta^{m-1}(0)$ ou dans $\theta^{m-1}(1)$ et les nombres n_k occupent des places fixes $\tilde{\beta}_m$ dans $\theta^{m-1}(0)$ ou dans $\theta^{m-1}(1)$.

Soit alors R donné. Il existe m_1 tel que si m est supérieur à m_1 , alors $\tilde{\beta}_m$ est un intervalle R -coïncidant dans $\theta^{m-1}(0)$ et $\theta^{m-1}(1)$ puisque $\beta \in X$.

Si m est choisi de telle sorte que pour k et k' suffisamment grands, n_k et $n_{k'}$ occupent la même place dans $\theta^{m-1}(0)$ ou $\theta^{m-1}(1)$ on aura :

$$\omega(n_k - R, 2R) = \omega(n_{k'} - R, 2R) .$$

Donc à tout R positif, on peut associer K tel que pour tout k et tout k' supérieurs à K on ait

$$T_{\omega}^{n_k}(-R, 2R) = T_{\omega}^{n_{k'}}(-R, 2R)$$

donc $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^n \omega$ existe (et est unique).

L'application h de O_θ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est donc un homomorphisme du système dynamique (O_θ, T) dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^*)$, qui est bijectif sur l'image réciproque du sous-ensemble $X \cap S^c$ de mesure 1.

On a donc démontré le

Théorème

Les systèmes dynamiques (O_θ, T) et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^)$ sont isomorphes au sens de la mesure.*

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha^)$ étant à spectre discret, il en est de même du système dynamique (O_θ, T) .*

III.-EXEMPLE DE SUBSTITUTION DE LONGUEUR NON CONSTANTE A SPECTRE CONTINU

III.1. Nous nous proposons d'étudier les substitutions, sur 2 symboles, ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Parmi ces substitutions il y en a trois qui sont non finies :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 & 1 \\ \theta(1) = 1 & 0 & 1 & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0) = 0 & 1 \\ \theta(1) = 1 & 0 & 0 & 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0) = 0 & 1 \\ \theta(1) = 1 & 1 & 0 & 0 \end{cases}$$

Les longueurs des blocs $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$ sont respectivement

$$\lambda_0^{(\ell)} = 2 \cdot 3^{\ell-1} \quad \lambda_1^{(\ell)} = 4 \cdot 3^{\ell-1}$$

D'après J.C. Martin [24], $(0_\omega, T)$ a pour facteur équicontinu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3$ où $\mathbb{Z}_2$ est le groupe cyclique d'ordre 2 et $\mathbb{Z}^3$ le groupe triadique.

Explication : Les blocs $\theta^\ell(0)$ et $\theta^\ell(1)$ commencent toujours à des places "paires" dans ω_{00} .

Si $\omega = \lim T^{n_k} \omega_{00}$, on peut repérer les places occupées dans ω par les blocs $\theta^\ell(i)$. Si ces places sont à des rangs pairs, posons $f_0(\omega)=1$ et si elles sont à des rangs impairs posons $f_0(\omega) = -1$. Alors

$$T f_0(\omega) = f_0(T\omega) = -f_0(\omega)$$

f_0 est donc une fonction caractéristique associée à la valeur caractéristique -1. Ceci explique le terme $\mathbb{Z}_2$ dans le facteur équicontinu.

Pour $\ell \geq 2$, $\lambda_0^{(\ell)}$ et $\lambda_1^{(\ell)}$ sont des multiples de $3^{\ell-1}$. Considérons les i -blocs déterminés d'ordre ℓ ; la place de ces i -blocs

sera parfaitement déterminée dans ω et deux i-blocs identiques auront des places qui différeront d'un multiple de $3^{\ell-1}$. En prenant pour fonction f_k une fonction qui prend les valeurs λ_k des racines $3^{\ell-1}$ ième de l'unité, en chacune des différentes places possibles, on obtiendra $Tf(\omega) = \lambda_k f(\omega)$.

Ceci nous conduit au spectre de $(\mathbb{Z}^3, T)$.

III.2.-Etude des substitutions

$$\begin{cases} \theta_1(0) = 0 \ 1 \\ \theta_1(1) = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_2(0) = 0 \ 1 \\ \theta_2(1) = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \end{cases}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1(A) = A \ B \ A \\ \hat{\theta}_1(B) = B \ B \ B \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{\theta}_2(A) = A \ A \ B \\ \hat{\theta}_2(B) = B \ B \ B \end{cases}$$

La matrice associée est $\hat{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\frac{\hat{M}^k}{3^k}$ converge vers la

matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La densité de coïncidence dans θ_1 et θ_2 est donc égale à 1.

Nous pouvons représenter $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3 = G$ de la manière suivante :

$$G = \{z \mid z = \sum z_i n_i\}$$

avec

$$n_0 = 1$$

$$n_1 = 2$$

$$n_i = 2 \cdot 3^{i-1} \quad \text{si } i \geq 2$$

$$\text{et } z_0 < 2 \quad z_i < 3 \quad \forall i \geq 1.$$

Comme $\lambda_0^{(\ell)} = 2 \cdot 3^{\ell-1}$ et $\lambda_1^{(\ell)} = 4 \cdot 3^{\ell-1}$ nous pouvons couper ω_{10} en blocs de longueur $2 \cdot 3^{\ell-1}$. Alors chaque bloc est soit un $\theta^{\ell-1}(01)$ soit un $\theta^{\ell-1}(10)$. Or si $z \in G$, $\tilde{z}_\ell = \sum_{i=0}^{\ell-1} z_i n_i$ occupe une place fixe dans les blocs $2 \cdot 3^{\ell-1}$ donc dans $\theta^{\ell-1}(01)$ ou dans $\theta^{\ell-1}(10)$. Comme la densité de coïncidence est 1, l'image réciproque de z sera réduite à un point ω pour un sous-ensemble de G de mesure 1.

Il y a donc isomorphisme au sens de la mesure entre les systèmes dynamiques θ_i ($i=1,2$) et G .

Les substitutions θ_i sont donc à spectre discret.

III.3.-Etude de la substitution
$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \ 1 \\ \theta(1) = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{cases}$$

Par la méthode déjà utilisée en (II) on montre que la densité de coïncidence est ici $\frac{1}{3}$.

III.3.1.-Lemme

La donnée de z et du 2-bloc contenant $\omega(0)$ détermine entièrement la bi-suite ω telle que $z = \pi(\omega)$ où π est la projection de $\mathcal{O}_\theta$ sur $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3$.

Preuve

Si $z \in G$, $\tilde{z}_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} z_i n_i$ occupe une place fixe dans $\theta^\ell(0)$ ou dans la première moitié de $\theta^\ell(1)$ ou dans la seconde moitié de $\theta^\ell(1)$. $\tilde{z}_0$ occupe en particulier une place fixe dans l'un des trois blocs $a = 0 \ 1$, $b = 1 \ 1$, ou $c = 0 \ 0$.

Si nous considérons alors les blocs $\theta^\ell(0)$, début de $\theta^\ell(1)$, fin de $\theta^\ell(1)$, les places de a, b, c sont bien déterminées et ne sont jamais coïncidentes.

$$\begin{aligned} \text{En effet} \quad \theta(a) &= a \ b \ c \\ \theta(b,c) &= b \ c \ b \ c \ a \ a \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \tilde{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \ b \ c \\ b \ c \ b \\ c \ a \ a \end{pmatrix}$$

z étant donné, ω est déterminé de manière unique dès que l'on connaît la place occupée dans a , b ou c par $\omega(0)$ et que l'on sait dans quel bloc on se trouve.

Il y a donc 3 possibilités suivant que l'on soit dans a , dans b ou dans c , donc z a trois images réciproques par π^{-1} .

III.3.2.-Proposition

La substitution $\theta(0) = 0 \ 1$
 $\theta(1) = 1 \ 1 \ 0 \ 0$ est à spectre continu.

Soit $H_0 = \{f \in L^2(O_\theta, \mu_\theta) \mid \exists g \in L^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3, \nu) : f = g \circ \pi\}$, où μ_θ est la mesure de probabilité invariante sur O_θ (unique puisque le système dynamique (O_θ, T) est strictement ergodique), et ν est la mesure de probabilité invariante sur $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3$.

H_0 est l'ensemble engendré par les fonctions propres continues de T puisque π est l'homomorphisme associé au groupe structure $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3$ de (O_θ, T) .

Lemme : Si $h \in H_0^\perp$ et h est une fonction propre de T , alors $h^3 \in H_0$.

Démonstration

Comme h est une fonction propre, on a

$$\begin{aligned} |h| &= \text{cste} \\ h \in H_0^\perp &\iff \langle f, h \rangle = 0 \quad \forall f \in H_0 \end{aligned}$$

donc

$$\int_{O_\theta} \overline{h}(\omega) g \circ \pi(\omega) \mu_\theta(d\omega) = 0 \quad \forall g \in L^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3)$$

Posons, pour tout borélien E de O_θ ,

$$\mu(E) = \int_{\pi(E)} \frac{\text{card} [\pi^{-1}(z) \cap E]}{3} \nu(dz) .$$

On définit ainsi une mesure de probabilité sur O_θ qui est invariante sous T .

En effet,

$$\mu(T^{-1}E) = \frac{1}{3} \int_{\pi(T^{-1}E)} \text{card} [\pi^{-1}(z) \cap T^{-1}E] \nu(dz) .$$

Mais les trois éléments distincts d'une fibre sont transformés en trois éléments distincts d'une autre fibre puisque les blocs a , b et c ne coïncident jamais.

Donc

$$\text{card} [\pi^{-1}(z) \cap T^{-1}E] = \text{card} [\pi^{-1}(Tz) \cap E]$$

L'invariance de μ découle alors de l'invariance de ν sous l'opérateur T^* de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3$.

μ est donc une mesure de probabilité invariante sur O_θ . Comme il n'y a qu'une telle mesure d'après la stricte ergodicité de (O_θ, T) , μ est la mesure initiale μ_θ sur O_θ et μ_θ admet la désintégration

$$\mu_\theta(d\omega) = \int_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3} \varphi_z(d\omega) \nu(dz)$$

avec

$$\varphi_z = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{O_\theta} \bar{h}(\omega) g \circ \pi(\omega) \mu_\theta(d\omega) &= \int_{O_\theta} \int_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3} \bar{h}(\omega) g \circ \pi(\omega) \varphi_z(d\omega) \nu(dz) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3} g(z) \left[\int_{O_\theta} \bar{h}(\omega) \varphi_z(d\omega) \right] \nu(dz) \end{aligned}$$

Cette quantité étant nulle pour tout g de $L^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3, \nu)$ on doit avoir

$$\int_{O_\theta} \bar{h}(\omega) \varphi_z(d\omega) = 0 \text{ pour presque tout } z .$$

Comme $\varphi_z = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, si ω_1, ω_2 et ω_3 sont les images réciproques de z on doit avoir

$$\bar{h}(\omega_1) + \bar{h}(\omega_2) + \bar{h}(\omega_3) = 0 \text{ pour presque tout } z.$$

Puisque $|h| = \text{cste}$, on a

$$\bar{h}(\omega_2) = j \bar{h}(\omega_1)$$

$$\text{et } \bar{h}(\omega_3) = j^2 \bar{h}(\omega_1) \text{ (avec } j^3 = 1)$$

Par conséquent $\bar{h}^3$, donc aussi h^3 est constante sur chaque fibre. h^3 se factorise donc par π : il existe $g_0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3)$ telle que

$$h^3 = g_0 \circ \pi \text{ et } h^3 \in H_0$$

Soit alors λ la valeur caractéristique de T associée à la fonction propre h .

λ^3 est une valeur caractéristique associée à la fonction propre h^3 qui appartient à H_0 .

Or les valeurs caractéristiques de H_0 sont les éléments du spectre de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^3$. Elles sont donc de la forme $\varepsilon \exp \frac{2\pi i k}{3^j}$ ($\varepsilon = \pm 1$)

Donc

$$\lambda^3 = \varepsilon \exp \frac{2\pi i k}{3^j}$$

Alors $\lambda = \varepsilon \exp \frac{2\pi i k}{3^{j+1}}$ est un élément du spectre.

A la valeur caractéristique λ sont donc associées deux fonctions propres, l'une dans H_0 , l'autre dans $H_0^\perp$ ce qui contredit l'ergodicité.

Le spectre sur $H_0^\perp$ est donc continu et la substitution θ est à spectre continu.

III.3.3.-Généralisation aux substitutions de la forme $\theta(0) = 0^n 1^n$
 $\theta(1) = 1^{2n} 0^{2n}$

Conjecture : Si n est pair, la substitution est à spectre discret.

Si n est impair, la substitution est à spectre continu.

Si $n = 2p$ est pair, on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} 0^{2p} & 1^{2p} & 0^{2p} & 1^{2p} \\ 1^{4p} & 0^{4p} & & \end{pmatrix}$$

et alors

$$\hat{\theta}(A) = A^p (\hat{1}^{4p} \hat{0}^{4p})^{2p} A^{3p}$$

La matrice associée à la substitution $\hat{\theta}$ est alors

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 2p & 2p & 0 \\ 4p & 4p & 0 \\ 8p^2 & 8p^2 & 4p \end{pmatrix}$$

et il est aisé de voir que la densité de coïncidence de la substitution θ est 1.

Au contraire si n est impair, la densité de coïncidence de la substitution est $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad a &= 0^{2n+1} \quad 1^{2n+1} \\ b &= 1^{4n+2} \\ c &= 0^{4n+2} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^{2n+1} & (bc)^{2n+1} \\ (bc)^{3n+1} & b \\ c(bc)^n & a^{4n+2} \end{pmatrix}$$

et on constate que sur chaque colonne apparaît une permutation de a, b, c .

Les résultats sont alors analogues à ceux de la substitution

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \ 1 \\ \theta(1) = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{cases}$$

Le groupe structure est ici $\mathbb{Z}(2, 6n+3) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^{6n+3} = \{z \mid z = \sum z_i n_i\}$

avec $n_0 = 1 \quad n_1 = 2$

$$n_i = 2(6n+3)^{i-1} \quad \forall i \geq 2$$

et $z_0 < 2, \quad z_i < 6n+3 \quad \forall i \geq 1.$

III.4.- Etude de la densité de coïncidence des substitutions de longueur constante

Dans le cas des substitutions de longueur constante, la classification faite par Coven et Keane [4] distingue, outre les substitutions finies dont l'étude est immédiate :

a) les substitutions dites continues si n est pair et $\theta(0) = \tilde{\theta}(1)$ où $\sim$ est l'opérateur de "miroir" défini par $\tilde{\omega}_k = 1 - \omega_k$.

Dans ce cas O_θ est l'orbite fermée d'une suite de Morse généralisée et le spectre de la substitution est continu.

On peut associer la substitution $\hat{\theta}$ (à un symbole !) :

$\hat{\theta}(A) = A^n$ avec $A = \begin{pmatrix} \theta(1) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \theta(1) \end{pmatrix}$. Donc $\delta_c = 0$ puisque la densité de coïncidence dans A est 0.

b) les substitutions discrètes si $\theta(0)$ et $\theta(1)$ contiennent chacun les éléments 0 et 1 et s'ils ont au moins une valeur de coïncidence et une valeur de non-coïncidence.

Alors O_θ est l'orbite fermée d'une suite régulière de Toeplitz.

Nous pouvons poser $I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice associée à la substitution $\hat{\theta}$ est

$$\hat{M} = \left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ k & n-k \end{pmatrix} \right) \text{ avec } 0 < k < n$$

La densité du bloc I dans $\hat{\theta}^\infty(A)$ est donc 1. On en déduit que la densité de coïncidence δ_c vaut 1.

III.5.- Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans les chapitres II et III par le tableau suivant :

Substitution				δ_c densité de coïncidence	Spectre
longueur constante	Suite de Toeplitz régulière $(\theta(0) \neq \widetilde{\theta(1)})$ (†)			1	Discret
	Suite de Morse généralisée $(\theta(0) = \widetilde{\theta(1)})$ (†)			0	Continu
longueur non constante	$M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{cases} \theta(0) = 0^{n+1-p} 1 0^p \\ \theta(1) = 1 0^n \end{cases} \quad 0 \leq p \leq n$		1	Discret
	$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{cases} \theta(0) = 01 \\ \theta(1) = 1010 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta(0) = 01 \\ \theta(1) = 1001 \end{cases}$		1	Discret
		$\begin{cases} \theta(0) = 01 \\ \theta(1) = 1100 \end{cases}$		$\frac{1}{3}$	Continu
	$M = \begin{pmatrix} n & n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$	$\begin{cases} \theta(0) = 0^n 1^n \\ \theta(1) = 1^{2n} 0^{2n} \end{cases}$	n pair	1	Discret(?)
			n impair	$\frac{1}{3}$	Continu(?)

(†) avec $\widetilde{\omega}_k = 1 - \omega_k$

DEUXIEME PARTIE

GENERALISATION D'UN LEMME DE "DECOUPAGE" DE ROKHLIN

Soient (Ω, β, m, T) un système dynamique apériodique et $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ un ensemble fini d'entiers.

On constate qu'il n'est pas toujours possible de déterminer un ensemble mesurable A tel que les $T^{k_i} A$ soient deux à deux disjoints et recouvrent Ω à ε près. On étudie alors la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i} A$.

On donne enfin un exemple de suite infinie $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, \dots)$ telle que la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i} A$ ait une limite inférieure nulle.

I.-Le lemme de Rokhlin [28]

Soit (Ω, β, m) un espace mesuré fini et T une transformation bi-mesurable de Ω dans lui-même, conservant la mesure.

T est apériodique si

$$m(\{\omega \mid \exists n \geq 1, T^n \omega = \omega\}) = 0.$$

Lemme de Rokhlin

Si T est apériodique, pour tout entier positif n et tout nombre réel positif ε , il existe un ensemble mesurable A tel que les ensembles $A, TA, T^2A, \dots, T^{n-1}A$ soient deux à deux disjoints et vérifient

$$m(\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} T^i A) < \varepsilon.$$

II.-Notations

$$K = (k_i)_{i \in [0, n-1]} ; k_i \in \mathbb{N}, k_0 = 0, k_i < k_{i+1}$$

$$\mathcal{N}_K = \{N, N \in \mathbb{N} ; \forall k_i \in K, \forall k_j \in K \quad k_i \neq k_j \implies (N+k_i) \cap (N+k_j) = \emptyset\}.$$

$(\mathcal{N}_K)$ n'est pas vide car il contient la suite

$$N = (k_{n-1}+1, 2(k_{n-1}+1), 3(k_{n-1}+1) \dots)$$

La densité extérieure de N sera notée $d^*(N)$:

$$d^*(N) = \overline{\lim}_n \frac{\text{card}(N \cap [0, n-1])}{n}$$

Enfin, nous poserons :

$$\mathcal{A}_K = \{A ; A \in \mathcal{B} ; T^{k_i}_A \cap T^{k_j}_A = \emptyset \quad \forall i \neq j\}$$

III.-Lemme I

$$\text{Soit } \sigma = \sigma_K = \sup_{N \in \mathcal{N}_K} d^*N$$

Pour tout A de $\mathcal{A}_K$ on a $m(A) \leq \sigma m(\Omega)$

Démonstration

$$\text{Soit } A \in \mathcal{A}_K. \text{ Posons } B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i}_A. \text{ Alors } 1_B \in L^1.$$

Le théorème de Birkhoff montre que

$$\frac{1}{p} \sum_{0}^{p-1} 1_B(T^k_\omega) \longrightarrow \bar{f}(\omega) \quad \text{m.p.p.}$$

et

$$\int \bar{f} dm = \int f dm = \int 1_B dm = m(B) = n m(A)$$

puisque m est une mesure finie.

$$\text{Soit } N_o(\omega) = \{k. | k \in \mathbb{N}, T^k_\omega \in A\}.$$

Alors

$$N_o(\omega) + k_i = \{k | T^{k-k_i}_\omega \in A\} = \{k | T^k_\omega \in T^{k_i}_A\} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

et

$$A \in \mathcal{A}_K \implies N_o(\omega) \in \mathcal{N}_K.$$

En effet, si $k \in N_0 + k_i$ et $k \in N_0 + k_j$, on a $T_\omega^k \in T_{A_i}^{k_i}$ et $T_\omega^k \in T_{A_j}^{k_j}$.

Puisque $A \in \mathcal{A}_K$, $T_{A_i}^{k_i} \cap T_{A_j}^{k_j} = \emptyset$ donc

$$(N_0(\omega) + k_i) \cap (N_0(\omega) + k_j) = \emptyset$$

$$\text{Donc } 1_B(T_\omega^k) = 1 \iff T_\omega^k \in B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T_{A_i}^{k_i} \iff k \in \bigcup_{i=0}^{n-1} N_0(\omega) + k_i$$

donc

$$\frac{1}{p} \sum_0^{p-1} 1_B(T_\omega^k) = \frac{1}{p} \text{card} \left\{ \left[\bigcup_{i=0}^{n-1} (N_0(\omega) + k_i) \right] \cap [0, p-1] \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\text{card}(N_0(\omega) + k_i) \cap [0, p-1]}{p}$$

Mais

$$\begin{aligned} \text{card} [N \cap [0, p-1]] &= \text{card} [N \cap [0, p-k-1]] + \text{card} [N \cap [p-k-1, p-1]] \\ &= \text{card} [(N+k) \cap (k, p-1)] + \text{card} [N \cap [p-k-1, p-1]] \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\text{card} [N \cap (0, p-1)]}{p} = \frac{\text{card} [(N+k) \cap (k, p-1)]}{p} + \frac{\text{card} [N \cap (p-k-1, p-1)]}{p}$$

Comme

$$\text{card} [N \cap (p-k-1, p-1)] \leq k$$

on a

$$\overline{\lim} \frac{\text{card} [N \cap (0, p-1)]}{p} = \overline{\lim} \frac{\text{card} [(N+k) \cap (k, p-1)]}{p}$$

donc

$$d^*(N) = d^*(N+k) .$$

Comme $\frac{1}{p} \sum_0^{p-1} 1_B(T_\omega^k)$ converge vers $\bar{f}(\omega)$ m.p.p. on déduit

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d^*(N_0(\omega) + k_i) = n d^*(N_0(\omega)) \\ &\leq n \sigma \quad p.p \end{aligned}$$

d'où

$$n m(A) = \int \bar{f} d m \leq \int n \sigma d m = n \sigma m(\Omega) .$$

IV.-Lemme 2

Pour tout ε positif, il existe A , élément de $\mathcal{A}_K$, tel que

$$m(A) > (\sigma - \varepsilon) m(\Omega)$$

Démonstration

Soient N_0 tel que $d^*(N_0) = \sigma_0 > \sigma - \frac{\varepsilon}{2}$ et M un entier vérifiant

$$\begin{cases} \frac{M}{M + k_{n-1}} > 1 - \varepsilon_1 \\ \frac{\text{card}(N_0 \cap [0, M-1])}{M} > \sigma_0 - \varepsilon_2 \end{cases}$$

Appliquons le théorème de Rokhlin avec

$$K' = \{0, 1, 2, \dots, M + k_{n-1} - 1\}$$

$$\forall \varepsilon_3 > 0, \exists A_0 \in \mathcal{A}_{K'}$$

tel que si

$$0 \leq i \leq M + k_{n-1} - 1$$

$$0 \leq j \leq M + k_{n-1} - 1, \quad i \neq j$$

on ait

$$T^i A_0 \cap T^j A_0 = \emptyset$$

et

$$m(A_0 \cup T A_0 \cup \dots \cup T^{M+k_{n-1}-1} A_0) > (1 - \varepsilon_0) m(\Omega)$$

On a donc

$$(M + k_{n-1}) m(A_0) > (1 - \varepsilon_3) m(\Omega)$$

soit

$$m(A_0) > \frac{1 - \varepsilon_3}{M + k_{n-1}} m(\Omega).$$

Posons

$$A = \bigcup_{i \in N_0 \cap [0, M-1]} T^i A_0$$

Alors

$$B = \bigcup_{j \in K} T^j A \subset \bigcup_{i=0}^{M+k_{n-1}-1} T^i A_0$$

Donc B est une union disjointe de $T^j A$, et

$$\begin{aligned} m(A) &= [\text{card}(N_0 \cap (0, M-1))] m(A_0) > M \cdot (\sigma_0 - \varepsilon_2) \frac{(1 - \varepsilon_3) m(\Omega)}{M + k_{n-1}} \\ &> (1 - \varepsilon_1) (\sigma_0 - \varepsilon_2) (1 - \varepsilon_3) m(\Omega) \\ &> (\sigma_0 - \frac{\varepsilon}{2}) m(\Omega) \geq (\sigma - \varepsilon) m(\Omega). \end{aligned}$$

Le recouvrement maximum de Ω a donc pour mesure $n \sigma_m(\Omega)$ où σ est la $\overline{\lim}_{N \in \mathcal{N}_K} d^*(N)$.

V.-Le lemme de Rokhlin n'est donc plus vrai lorsque l'on remplace l'ensemble $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ par un ensemble quelconque d'entiers :

$$(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$$

Par exemple, soit

$$K = K_{q,n} = (0, 1, 2, \dots, n, 2n, 3n, \dots, qn)$$

et $A \in \mathcal{B}$, un sous-ensemble mesurable de Ω tel que

$$\forall i \in K, \forall j \in K, i \neq j \implies T^i A \cap T^j A = \emptyset$$

Montrons que $\forall r, \forall s, 0 \leq r \leq qn, 0 \leq s \leq qn, r \neq s$ implique $T^r A \cap T^s A = \emptyset$.

$$\text{Soit} \quad r = kn + i$$

$$s = k'n + j$$

$$\text{avec} \quad 0 \leq k' \leq k < q$$

$$kn + i \neq k'n + j$$

$$0 \leq i \leq n$$

$$0 \leq j \leq n$$

a) $i < j$

$$T^{kn+i} A \cap T^{k'n+j} A = T^{k'n+i} (T^{(k-k')n} A \cap T^{(j-i)} A)$$

$$\text{Or} \quad (k-k')n \in K$$

$$j-i \in K$$

$$\text{Donc} \quad T^r A \cap T^s A = \emptyset$$

b) $i > j$

$$T^{kn+i} A \cap T^{k'n+j} A = T^{(k'-1)n+i} [T^{(k-k'+1)n} A \cap T^{n+j-i} A]$$

$$\text{Or} \quad 0 \leq n+j-i \leq n$$

$$\text{donc} \quad n+j-i \in K$$

$$\text{et} \quad (k-k'+1)n \in K$$

On a encore

$$T^r_A \cap T^s_A = \emptyset$$

Il y a donc au moins $(qn+1)$ sous-ensembles " T^i_A " disjoints dans Ω .

Comme $m(T^i_A) = m(A)$ on en déduit :

$$m(A) \leq \frac{1}{qn+1} m(\Omega)$$

Donc

$$m\left(\bigcup_{i \in K} T^i_A\right) \leq \frac{n+q}{qn+1} m(\Omega) \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q}\right) m(\Omega) < \varepsilon$$

si n et q sont suffisamment grands. On peut donc choisir K pour que le "recouvrement maximum" soit aussi petit que l'on veut.

VI.-Proposition

Il existe un nombre σ_K , indépendant de (Ω, β, m, T) ,

$0 < \sigma_K \leq \frac{1}{n}$ tel que :

$$1^\circ) \quad \forall A \in \mathcal{T}_K : m(A) \leq \sigma_K m(\Omega)$$

$$2^\circ) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{T}_K \text{ tel que } m(A) > (\sigma_K - \varepsilon) m(\Omega)$$

3°) On peut choisir K de telle sorte que $n\sigma_K$ soit aussi voisin de 0 que l'on veut.

VII.- σ_K est un nombre rationnel

VII.1.- Introduisons l'ensemble des "différences" :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_K = \{k_i - k_j \mid i \in \{0, n-1\}, j \in \{0, i-1\}\}$$

et notons $\mathcal{D}^*$ le complémentaire de $\mathcal{D}$ dans N .

Soit $N \in \mathcal{N}_K$ avec $N = \{0, n_1, n_2, \dots, n_p, \dots\}$

Alors $n \in \mathcal{N}_K \iff n_i - n_j \in \mathcal{D}^* \quad \forall i, \forall j$

Sinon $n_i - n_j = k_\ell - k_m$, donc $n_i + k_m = n_j + k_\ell$

Or $n_i + k_m \in N + k_m$ et $n_j + k_\ell \in N + k_\ell$

Comme $N + k_m$ et $N + k_\ell$ sont deux ensembles disjoints, ceci est impossible.

La recherche d'une suite N de $\mathcal{N}_K$ équivaut donc à celle d'une suite

$$D = \{n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots, n_p - n_{p-1} \dots\} = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$$

avec

$$\sum_{h=0}^j d_{i+h} \in \mathcal{D}^* \quad \forall i, \quad \forall j.$$

VII.2.- Soit $\alpha_n(D)$ la moyenne de Césaro de $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et $\alpha(D)$ la limite inférieure de $\alpha_n(D)$ pour n tendant vers l'infini :

$$\alpha_n(D) = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}$$

$$\alpha(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(D)$$

Nous pouvons ne considérer que des " d_i " dans $\underline{\mathcal{D}}^* = \mathcal{D}^* \cap (0, k_{n-1})$ car si on augmente d_i , $\alpha_n(D)$ augmente.

Nous avons

$$d_1 = n_1$$

$$d_1 + d_2 = n_2$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = n_3$$

$$\text{-----}$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = n_n$$

$$\text{donc} \quad n = \text{card} \left[N \cap (0, 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^n d_i) \right].$$

$$\text{Alors} \quad \delta_m = \frac{\text{card} [N \cap (0, m)]}{m} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n d_i < m < \sum_{i=1}^{n+1} d_i$$

Puisqu'il n'y a pas d'éléments de N entre $\sum_{i=1}^n d_i$ et $\sum_{i=1}^{n+1} d_i$,

on a

$$\delta_m = \frac{\text{card} [N \cap (0, \sum_{i=1}^n d_i)]}{\sum_{i=1}^n d_i + \lambda}$$

avec

$$\lambda < d_{i+1} < k_{n-1} \quad \text{car} \quad d_{i+1} \in \underline{\mathcal{D}}^*$$

d'où

$$\delta_m = \delta_{\sum d_i} \times \frac{\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^n d_i + \lambda}{n}}$$

Comme λ est borné,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^n d_i + \lambda}{n}} = 1$$

donc

$$\overline{\lim} \delta_m = \overline{\lim} \delta_{\sum d_i}$$

Soit

$$\begin{aligned} d^*(N) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card} \left[N \left(0, \sum_{i=1}^n d_i \right) \right]}{\sum_{i=1}^n d_i} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^n d_i} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(L)} = \frac{1}{\alpha(D)} \end{aligned}$$

VII.3.- Nous allons maintenant montrer qu'il existe une suite D_0 , périodique, telle que $\alpha(D_0)$ soit minimum.

Pour cela, nous allons étudier le problème suivant :

Soient m points pondérés de masses respectives $a_1, a_2, \dots, a_m$ tels que seuls certains "couples" $a_i a_j$ soient "admissibles". Nous dirons qu'une suite est "admissible" si tous les couples consécutifs extraits le sont.

Alors, il existe parmi toutes les suites admissibles une suite

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ avec

$$\omega_i \in \{a_\ell\} \quad \ell = 1, \dots, m$$

dont la limite des moyennes de Césaro soit minimale et cette suite peut être choisie périodique.

VII.4.-Démonstration

Formons toutes les "boucles admissibles" c'est-à-dire toutes les suites finies permises, sans points doubles.

Nous avons donc

$b = b_1 b_2 \dots b_k (b_1 \dots b_k)(b_1, \dots, b_k) \dots$ que nous écrirons

$b = b_1 b_2 \dots b_k$ avec $b_i \in \{a_\ell\}_{\ell \in (1 \dots m)}$; $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$

Il y a au plus

$$m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m!}{m}$$

telles boucles donc un nombre fini de boucles admissibles.

(Remarquons que pour les déterminer, il suffit de considérer toutes les boucles débutant par a_1 , puis toutes celles débutant par a_2 et ne contenant pas a_1 , puis toutes celles débutant par a_3 et ne contenant ni a_1 , ni a_2 ...).

Soit alors

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_n \dots,$$

avec $\omega_i \in \{a_i\}_{i \in (1 \dots m)}$ une suite admissible.

Posons

$$\Omega_n = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$$

$$i_0 = i(\Omega) = \inf \{i | \omega_i \in (\omega_1 \dots \omega_{i-1})\}$$

$$j_0 = j(\Omega) \text{ défini par } \omega_{j(\Omega)} = \omega_{i(\Omega)} \text{ avec } j(\Omega) < i(\Omega).$$

$$\lambda_0 = \lambda(\Omega) = i(\Omega) - j(\Omega)$$

$$b_0 = b(\Omega) = \omega_{j(\Omega)} \omega_{j(\Omega)+1} \dots \omega_{i(\Omega)-1}$$

$$\text{et } \varphi(\Omega) = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{j(\Omega)-1} \omega_{i(\Omega)} \omega_{i(\Omega)+1} \dots \omega_n \dots$$

Si $\alpha(\Omega_n)$ est la moyenne de Césaro de Ω_n nous avons :

$$\alpha(\Omega_n) = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{n}$$

$$\text{Donc } n\alpha(\Omega) = (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_0-1}) + (\omega_{j_0} + \omega_{j_0+1} + \dots + \omega_{i_0-1}) + (\omega_{i_0} + \dots + \omega_n)$$

$$\begin{aligned} m\alpha(\Omega_n) &= (\omega_{j_0} + \omega_{j_0+1} + \dots + \omega_{i_0-1}) + (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_0-1} + \omega_{i_0} + \dots + \omega_n) \\ &= \lambda(\Omega) \alpha[b(\Omega_n)] + [n - \lambda(\Omega)] \alpha[\varphi(\Omega_n)] \\ &= \lambda_0 \alpha(b_0) + (n - \lambda_0) \alpha[\varphi(\Omega_n)] \end{aligned}$$

Appliquons de nouveau "l'opérateur φ " à $\varphi(\Omega_n)$. Nous obtenons

$$[n - \lambda_0(\Omega_n)] \alpha[\varphi(\Omega_n)] = \lambda_1 \alpha(b_1) - [n - \lambda_0 - \lambda_1] \alpha(\varphi^2(\Omega_n))$$

d'où

$$m\alpha(\Omega_n) = \lambda_0 \alpha(b_0) + \lambda_1 \alpha(b_1) + (n - \lambda_0 - \lambda_1) \alpha[\varphi^2(\Omega_n)]$$

et, de proche en proche,

$$m\alpha(\Omega_n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \alpha(b_i) + [n - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i] \alpha[\varphi^k(\Omega_n)]$$

avec $K = n - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \leq m$ car comme il y a m valeurs distinctes de ω_i ,

dans tout ensemble de longueur supérieure à m il y a au moins une boucle.

D'où

$$m\alpha(\Omega_n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \alpha(b_i) + K\alpha[\varphi^k(\Omega_n)] \geq (\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i) \alpha_0 + K\alpha[\varphi^k(\Omega_n)]$$

où α_0 représente l'infimum des moyennes de Césaro des boucles. D'autre part, $\varphi^k(\Omega_n)$ comporte K termes et sa moyenne de Césaro est supérieure ou égale à $\inf a_i$ donc

$$\begin{aligned} m\alpha(\Omega_n) &\geq (\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i) \alpha_0 + K \inf_i (a_i) \\ \alpha(\Omega_n) &\geq \frac{n-K}{n} \alpha_0 + \frac{K}{n} \inf_i a_i \\ &\geq \alpha_0 - \frac{K}{n} \alpha_0 + \frac{K}{n} \inf_i a_i \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\Omega_n) \geq \alpha_0.$$

Donc, il existe une suite "minimale" qui est périodique : c'est la suite

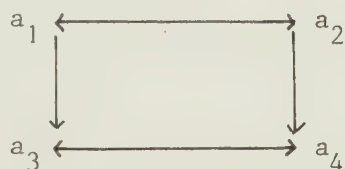
$$b_{\alpha_0} \quad b_{\alpha_0} \quad b_{\alpha_0} \quad \dots$$

où b_{α_0} est une boucle vérifiant $\alpha(b_{\alpha_0}) = \alpha_0 = \inf \alpha(b)$, l'infimum étant pris sur l'ensemble des boucles admissibles.

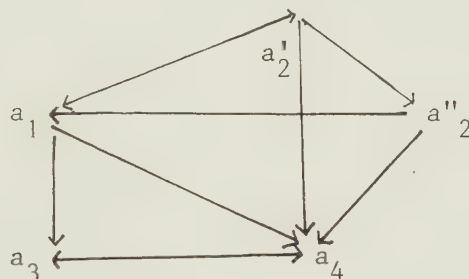
VII.5.-Remarque

Si une paire $a_i a_i$ est admissible sans que le triplet $a_i a_i a_i$ ne le soit, le raisonnement précédent s'applique encore en remplaçant le point a_i par deux points a'_i et a''_i , de même poids que a_i et en considérant les nouvelles paires admissibles convenables.

Exemple : supposons que l'on ait quatre points, les paires admissibles étant déterminées par le diagramme suivant :



si $a_2 a_2$ est admissible sans que $a_2 a_2 a_2$ le soit, on obtiendra le nouveau diagramme



VII.6. Prenons pour " a_n " tous les blocs admissibles B_ℓ tels que la somme des " d_i " d'un tel bloc soit supérieure ou égale à k_{n-1} , tous les blocs étant choisis de même longueur. Ceci est toujours possible : il suffit de prendre pour longueur commune des blocs le nombre $k_{n-1}+1$. En pratique, la longueur choisie pourra être très inférieure à ce nombre.

Alors si $B_1 B_2$ et $B_2 B_3$ sont admissibles, $B_1 B_2 B_3$ l'est car B_1 est sans influence sur B_3 puisqu'ils sont séparés par des termes dont la somme est supérieure à k_{n-1} donc appartient à $\mathcal{D}^*$.

Les blocs étant choisis de même longueur, la moyenne de Césaro des d_i est la moyenne de Césaro des blocs positifs.

La suite minimale périodique trouvée dans le lemme nous fournit donc une suite minimale périodique d'éléments de D dont la limite des moyennes de Césaro est rationnelle.

Donc σ est rationnel.

VII.7.-Exemples

a) Reprenons l'exemple de V :

$$K = \{0, 1, 2, \dots, n, 2n, 3n, \dots, qn\}$$

$$\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, qn\}$$

donc $\mathcal{D}^* = \{m \mid m \geq qn+1\}$ et la suite minimale périodique est trivialement :

$$D = (0, qn+1, qn+1, \dots)$$

d'où

$$N = (0, qn+1, 2(qn+1), 3(qn+1) \dots)$$

et

$$\sigma_K = \frac{1}{qn+1}$$

b)

$$K = \{0, 3, 7\}$$

$$\mathcal{D} = \{0, 3, 4, 7\}$$

$$\mathcal{D}^* = \{1, 2, 5, 6, 8\}$$

$$b_o = 1, 1, 8$$

et

$$\alpha(b_o) = \inf (a_i) = \frac{10}{3}$$

d'où

$$\sigma = \frac{3}{10}$$

et

$$m(A \cup T^3 A \cup T^7 A) < \frac{9}{10} m(\Omega)$$

si A , $T^3 A$ et $T^7 A$ sont disjoints.

VIII. Exemple d'une suite infinie (k_i) , $(k_i < k_{i+1})$ telle que la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i} A$ ait une limite inférieure nulle.

Nous allons montrer que la suite ci-dessous répond à la question :

$$\begin{aligned}
 & 0, 1, 2, 3, \dots, n, 2n, 3n, \dots, qn, \\
 & m_1, m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_1 + 2n, m_1 + 4n, m_1 + 6n, \dots, m_1 + 2^2 qn, \\
 & m_2, m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m_2 + 2^2 n, m_2 + 2.2^2 n, m_2 + 3.2^2 n, \dots, m_2 + 2^4 qn, \\
 & m_3, m_3 + 1, m_3 + 2, \dots, m_3 + 2^3 n, m_3 + 2.2^3 n, m_3 + 3.2^3 n, \dots, m_3 + 2^6 qn \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 & m_p, m_p + 1, m_p + 2, \dots, m_p + 2^p n, m_p + 2.2^p n, m_p + 3.2^p n, \dots, m_p + 2^p q.2^p n \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

avec $m_{p+1} > m_p + 2^{2p} qn$.

Considérons la sous suite finie K_p
 $K_p = \{0, 1, \dots, m_p + 2^{2p} qn\}$

et soit σ_p correspondant.

L'ensemble des différences contient l'ensemble des différences $k_j - k_i$ pour $m_p < k_i < k_j < m_{p+1}$, c'est-à-dire l'ensemble des différences de l'ensemble.

$$0, 1, 2, \dots, 2^p n, 2.2^p n, 3.2^p n, \dots, 2^p q.2^p n$$

Or, cet ensemble "différence" est l'ensemble de tous les nombres entiers compris entre 0 et $2^{2p} qn$.

La mesure maximale de A_p , sous ensemble associé à K_p , est donc inférieure à

$$\left(\frac{1}{2^{2p} qn + 1} \right) m(\Omega)$$

donc
$$\sigma_p < \frac{1}{2^{2p} qn + 1} < \frac{1}{2^{2p} qn}$$

Or si ρ_p est le nombre de termes de la suite K_p on a :

$$\begin{aligned}
 \rho_p &= (n+1) + (q-1) + (2n+1) + (2q-1) + (2^2 n+1) + (2^2 q-1) + \dots + (2^p n+1) + (2^p q-1) \\
 &= n(1+2+2^2+\dots+2^p) + q(1+2+2^2+\dots+2^p) \\
 &= (n+q) \frac{2^{p+1}-1}{2-1} = (n+q) (2^{p+1}-1)
 \end{aligned}$$

donc

$$\rho_p \sigma_p < \frac{(n+q) (2^{p+1}-1)}{2^{2p} qn} < \frac{1}{2^{p-1}} \frac{n+q}{n q} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARNOLD-AVEZ. Problèmes ergodiques de la Mécanique Classique.
Gauthier-Villars. (1967).
- [2] BILLINGSLEY. Ergodic theory and information.
- [3] BOREVITCH-CHAFAREVITCH. Théorie des nombres. Gauthier-Villars.
(1967).
- [4] COVEN-KEANE. The structure of substitution Minimal sets.
Trans. Amer. Math. Soc. vol. 162, déc. 1971, 89-102.
- [5] ELLIS-GOTTSCHALK. Homomorphism of transformation groups.
Trans. Amer. Math. Soc., vol. 94, (1960), 258-271.
- [6] GOTTSCHALK (W.H.). Minimal sets : an introduction to topological dynamics. Bull. of the Amer. Math. Soc. vol. 64,
(1958), 336-351.
- [7] _____. Substitution Minimal Sets. Trans. Amer.
Math. Soc., vol. 109, (1963), 467-491.
- [8] GOTTSCHALK-HEDLUND. Topological dynamics. Amer. Math. Soc.
Colloq. Publ., vol. 36, (1955).
- [9] GRILLENBERGER C. Constructions of strictly ergodic systems I and II. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Geb. 25, (1973).
- [10] _____. Zwei Kombinatorische Konstruktionen für strikt ergodische Folgen. Universität Erlangen-Nürnberg.
- [11] HALMOS. Lectures on ergodic theory.
- [12] HALMOS-VON NEUMANN. Operator Methods in classical mechanics II.
Annals of Mathematics. vol. 43, n° 2, (1942), 332-350.
- [13] JACOBS. Lectures Notes on Ergodic Theory. Aarhus.
- [14] JACOBS-KEANE. 0-1 Sequences of Toeplitz type.
Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Geb. 13, (1969).
- [15] KAKUTANI S. Ergodic theory of shift transformations. Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles University of California Press, (1967), vol. 2, part. 2, 405-414.

- [16] KAKUTANI S. Strictly ergodic symbolic dynamical systems.
Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles of California Press, (1972).
- [17] KEANE M. Generalized Morse Sequences. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 10, (1968), 335-353.
- [18] _____. Strongly Mixing g-Measures. Inventiones Math. 16, Springer-Verlag, (1972), 309-324.
- [19] _____. Sur les mesures quasi ergodiques des translations irrationnelles. CRAS 272, (4/1/71), 54-55.
- [20] _____. Irrational rotations and quasi-ergodic measures. Publ. Sém. Math. Rennes, vol. 1, (1971), 17-26.
- [21] _____. Coding problems in ergodic theory. Université de Rennes.
- [22] KEANE-MICHEL. Généralisation d'un lemme de découpage de Rokhlin. CRAS 274, (1972), 926-928.
- [23] KLEIN (B.G.). Homomorphisms of Symbolic Dynamical Systems. Math. Systems Theory, vol. 6, n° 2, (1972).
- [24] MARTIN (J.C.). Minimal flows arising from substitutions on non constant length. Math. Systems Theory, vol. 7, n° 1, (1973).
- [25] MICHEL P. Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitutions. CRAS 278, (1974), 811-813.
- [26] MORSE-HEDLUND. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. Amer. J. of Math. 62, (1940), 1-42.
- [27] OXTOPY. Ergodic Sets. Bull. Amer. Math. Soc. 58, (1952) 116-136.
- [28] ROKHLIN. (en russe). Dokl. Akad. Nauk. SSR, 60, (1948), 349-351.

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
--------------	---

Première Partie

Chapitre 0 - Rappels et définitions	4
-------------------------------------	---

Chapitre 1 - Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitution	16
--	----

Chapitre 2 - Etude des substitutions ayant pour matrice	
---	--

$$M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad 29$$

Chapitre 3 - Exemples de substitutions de longueur non constante à spectre continu	54
--	----

Deuxième Partie

Généralisation d'un lemme de "Découpage" de Rokhlin	63
---	----

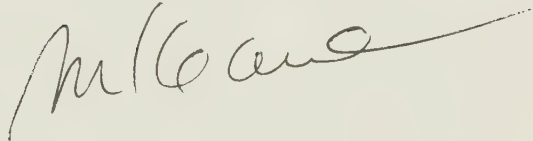
Bibliographie	76
---------------	----

VU :

Le Président de la Thèse

VU :

Le Directeur de Thèse



VU et APPROUVE

RENNES, le

Le Directeur de l'U.E.R.

VU pour autorisation de soutenance

RENNES, le

Le Président de l'Université de RENNES,

C. CHAMPAUD

